1 Vektory

Úloha 1.1
Zobrazte graficky nasledujúce vektory: $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{b} = (-3{,}8)$, $\vec{c} = (6{,}2{,}4)$, $\vec{d} = -8\vec{i} - 5\vec{k}$, $\vec{e} = -1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Úloha 1.2
Vyjadrite vektor $\vec{d}$, ktorý má trojnásobnú veľkosť a opačný smer ako vektor $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$.
[$\vec{d} = -6\vec{i} - 15\vec{j} + 3\vec{k}$]

Úloha 1.3
Sú dané vektory $\vec{a} = (3{,}2,-1)$ a $\vec{b} = (-1{,}2,-2)$. Určte súradnice vektorov $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.
[$\vec{c} = (2{,}4,-3)$; $\vec{d} = (4{,}0{,}1)$]

Úloha 1.4
Sú dané vektory $\vec{a} = 4{,}2\vec{i} - 1{,}6\vec{j}$, $\vec{b} = -1{,}6\vec{i} + 2{,}9\vec{j}$, $\vec{c} = -3{,}7\vec{j}$. Určte vektor $\vec{r}$, ktorý je ich vektorovým súčtom algebraicky a graficky.
[$\vec{r} = 2{,}6\vec{i} - 2{,}4\vec{j}$]

Úloha 1.5
Sú dané vektory $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$. Určte vektor $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{d} = 2\vec{b} - \vec{c}$.
[$\vec{a} = 5\vec{i} - 1\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{d} = 4\vec{i} - 11\vec{j} + 15\vec{k}$]

Úloha 1.6
Sú dané vektory $\vec{a} = (3{,}3)$, $\vec{b} = (1,-1)$, $\vec{c} = (2{,}5)$. Určte súradnice a veľkosť vektorov $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ a zobrazte ich graficky.
[$\vec{d} = (6{,}7)$; $|\vec{d}| = \sqrt{85}$; $\vec{e} = (4{,}9)$; $|\vec{e}| = \sqrt{97}$]

Úloha 1.7
Vypočítajte dĺžku vektora $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 1\vec{k}$ (cm).
[$|\vec{b}| = 5{,}09$ cm]

Úloha 1.8
Sú dané vektory $\vec{a} = (3{,}2)$ cm, $\vec{b} = (2{,}4)$ cm. Určte súradnice vektora $\vec{r} = \vec{b} - \vec{a}$, jeho veľkosť a odklon od jednotlivých osí.
[$\vec{r} = (-1{,}2)$; $|\vec{r}| = \sqrt{5}$; $\alpha = 116{,}6°$; $\beta = 26{,}6°$]

Úloha 1.9
Malé lietadlo odštartovalo za zlého počasia. Neskôr bolo videné vo vzdialenosti 215 km od letiska v severovýchodnom smere, zvierajúcim s miestnym poludníkom uhol 22 stupňov. Aká bola jeho vzdialenosť od letiska v severnom a východnom smere?
[199 km severne a 81 km východne od letiska]

Úloha 1.10

Dve kontrolné stanovištia A a B orientačného behu sú od seba vzdialené 3,4 km. Stanovište B leží severovýchodne od A v smere zvierajúcom s miestnou rovnobežkou uhol 35°. Pravidlá súťaže dovoľujú postupovať len severojužným alebo východozápadným smerom. Akú najmenšiu vzdialenosť musí súťažiaci prebehnúť zo stanovišťa A do B?

[4,74 km]

Úloha 1.11

Skupina poľovníkov vyrazila z tábora na poľovačku. Postupovali najskôr smerom na juh. Po hodine zmenili smer na východ, pokračovali v ňom jednu hodinu a potom zmenili smer pochodu na sever. Po hodine chôdze dorazili späť do tábora, v ktorom objavili medveďa, ako ničí zásoby. Našťastie sa podarilo medveďa odohnať skôr, ako spôsobil vážnejšie škody. Akej farby bol medveď?
[medveď bol bielej farby]

Úloha 1.12

Zablúdený hubár sa pohybuje 3 km smerom na sever, 2 km smerom na severovýchod (45° od severného smeru v smere hodinových ručičiek), 4 km smerom na západ a nakoniec 3 km juhovýchodne (45°). Charakterizujte pohyb hubára vektormi v zložkovom tvare. Vypočítajte celkovú dĺžku pochodu a priamu vzdialenosť medzi počiatkom a koncom pochodu.

[$\vec{a} = 3\vec{j}$; $\vec{b} = \sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$; $\vec{c} = -4\vec{i}$; $\vec{d} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{j}$; $s = 12$ km; $\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right| = 2{,}34$ km]

Úloha 1.13

Auto ide 50 km východným smerom, potom 30 km severne a ďalej 25 km severovýchodne pod uhlom 30° k miestnemu poludníku. Zostrojte vektorový diagram pohybu a určte súradnice a dĺžku celkového posunutia auta. Vypočítajte odklon celkového vektora posunutia od osi *x*.
[p_x = 62,5 km; p_y = 51,7 km; $|\vec{p}|$ = 81,1 km; $\alpha = 39{,}6°$]

Úloha 1.14

Vypočítajte uhol, ktorý zvierajú vektory $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ a $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$.
[$\varphi = 132{,}4°$]

Úloha 1.15

V jednom bode pôsobia sily $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ a $\overrightarrow{F_3}$, ktorých súradnice sú F_{1x} = 1 N, F_{1y} = 2 N, F_{2x} = -1 N, F_{2y} = 3N, F_{3x} = 0 N, F_{3y} = - 4 N. Určte veľkosť výslednice síl výpočtom a graficky. Určte veľkosť prvej a tretej sily a vypočítajte uhol, ktorý zvierajú.
[$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{2}$ N; $F_1 = \sqrt{5}$ N; $F_3 = 4$ N; $\varphi = 153{,}4°$]

Úloha 1.16

Veľkosti vektorov $\vec{c}$ a $\vec{d}$ sú *c* = 3, *d* = 4. Aký uhol tieto vektory zvierajú, ak ich skalárny súčin $\vec{c}\cdot\vec{d}$ je rovný a) 0, b) 12, c) -12?

[a) $\varphi = 90°$; b) $\varphi = 0°$; c) $\varphi = 180°$]

Úloha 1.17

Vypočítajte prácu, ktorú vykoná sila $\vec{F} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 9\vec{k}$ pôsobiaca na bod, ktorý sa pohybuje pozdĺž vektora $\vec{r} = 0\vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k}$. Pri výpočte použite vzťah pre prácu $W = \vec{F}\cdot\vec{r}$.

[$W = 16\,J$]

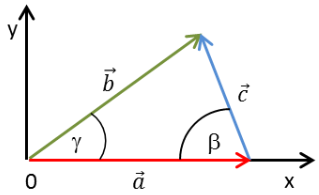
Úloha 1.18

Sú dané vektory $\vec{a} = (6,2)$, $\vec{b} = (4,4)$. Určte súradnice vektora $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ výpočtom a graficky. Vypočítajte veľkosť vektorov $\vec{a}$, $\vec{c}$, skalárny súčin $\vec{a} \cdot \vec{c}$ a uhol medzi vektormi $\vec{a}$ a $\vec{c}$.

[$\vec{c} = (2, -2)$; $|\vec{c}| = \sqrt{8}$; $|\vec{a}| = \sqrt{40}$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = 8$; $\varphi = 63{,}4°$]

Úloha 1.19

Na obrázku je znázornený trojuholník určený vektormi $\vec{a} = 5\vec{i}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$. Vypočítajte uhly medzi stranami a, b a stranami a, c.



[$\gamma = 36{,}9°$; $\beta = 71{,}6°$]

Úloha 1.20

Sú dané vektory $\vec{a} = (2,1,3)$, $\vec{b} = (1,-1,3)$. Určte vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ a vypočítajte jeho veľkosť.

[$\vec{c} = 6\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$; $c = \sqrt{54}$]

Úloha 1.21

Vypočítajte skalárny násobok vektorového súčinu vektorov $\vec{a} = 5\vec{i}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ skalárom $p = 2$.

[$p(\vec{a} \times \vec{b}) = 30\vec{k}$]

Úloha 1.22

Sú dané vektory $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$. Výpočtom ukážte, že operácia vektorového súčinu je antikomutatívna, teda platí: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

[$16\vec{i} + 29\vec{j} + 17\vec{k} = -(-16\vec{i} - 29\vec{j} - 17\vec{k})$]

Úloha 1.23

Vypočítajte plochu trojuholníka určeného dvojicou vektorov $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ (cm) a $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ (cm). Veľkosť vektorového súčinu dvoch vektorov predstavuje plošný obsah rovnobežníka, ktorého strany sú určené týmito vektormi.

[$S = 13{,}3\ \text{cm}^2$]

Úloha 1.24

Určte veľkosť momentu sily $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 9\vec{k}$ pôsobiacej v bode A [4,2,-3] vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy. Pri výpočte najprv vyjadrite polohový vektor, ktorý určuje polohu bodu A vzhľadom na počiatok. Pre moment sily platí $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

[$M = 51\ \text{N} \cdot \text{m}$]

Úloha 1.25

Sú dané vektory $\vec{a} = (2,1,3)$, $\vec{b} = (1,-1,3)$. Vypočítajte $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{d} = 2\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{d}$, uhol medzi vektormi $\vec{a}$ a $\vec{a} + \vec{b}$.

[$(\vec{a} + \vec{b}) = (3{,}0{,}6)$; $(\vec{a} - \vec{b}) = (1{,}2{,}0)$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$; $\vec{d} = (2, -2, 6)$; $\vec{a} \times \vec{d} = 12\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$; $\varphi = 17°$]