

2 Elektrický prúd v kovoch

2.1 Intenzita prúdu, hustota prúdu

Charakteristickou vlastnosťou valenčných elektrónov v kovoch je, že tieto prestávajú byť viazané na atómy a viac-menej sa voľne pohybujú v mriežke kovu. Nazývajú sa voľné alebo vodivostné elektróny. Za neprítomnosti elektrického poľa je ich pohyb chaotický, neusporiadaný, podobne ako je to u molekúl plynu. Ak kovový vodič pripojíme na zdroj jednosmerného napätia (napríklad k batérii), v každom bode vo vnútri vodiča vznikne elektrické pole \vec{E} , ktoré bude pôsobiť na elektróny a spôsobí, že sa začnú pohybovať proti smeru \vec{E} usmerne- ným pohybom. Hovoríme, že vznikol elektrický prúd. Stredný elektrický prúd vo vodiči je definovaný ako:

$$I_s = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

kde ΔQ je náboj, ktorý prejde daným miestom prierezu vodiča počas časového intervalu Δt .

Ak sa elektrické napätie zdroja v čase mení, potom ani prúd nie je v čase konštantný a potrebujeme zaviesť veličinu, ktorá by vyjadrovala elektrický prúd v danom okamihu. Takouto veličinou je okamžitý elektrický prúd definovaný vzťahom:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}.$$

Jednotkou elektrického prúdu je ampér (A).

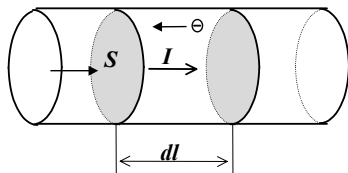
Vo všeobecnosti pojem prúd zahŕňa aj pohyb nábojov v trojrozmernom priestore. Aby sme ho popísali, zavedieme novú mikroskopickú veličinu - prúdovú hustotu \vec{j} . Je to vektorová veličina, ktorá je charakteristikou určitého bodu vo vnútri vodiča a nie vodiča ako celku.

Nech vo vodiči kruhového prierezu S sú voľné náboje s objemovou hustotou

$$\rho_V = \frac{dQ}{dV}, \quad (2.1)$$

kde dQ je voľný náboj v elementárnom objeme $dV = Sdl$ (Obr. 2.1). Pre jednoduchosť uvažujeme voľné náboje jedného druhu - napríklad voľné náboje v kovoch. Tieto voľné náboje nech sa pohybujú strednou rýchlosťou v_s . Veľkosť prúdovej hustoty definujeme ako podiel prúdu I , ktorý tečie plochou S a tejto plochy:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \quad (2.2)$$



Obr. 2.1

Elementárny voľný náboj dQ , ktorý prejde plochou S za elementárny časový interval dt je náboj, ktorý sa nachádza v elementárnom objeme dV naznačenom na Obr. 2.1. V súlade s označením na tomto obrázku a vzťahom (2.1) platí:

$$dQ = \rho_V dV = \rho_V S dl.$$

Dosadením do rovnice (2.2) dostaneme

$$j = \frac{1}{S} \frac{\rho_V S dl}{dt} = \rho_V v_s$$

kde $v_s = \frac{dl}{dt}$ je stredná rýchlosť elektrónov (driftová rýchlosť). Ak je náboj voľného elektrónu e a v objemovej jednotke daného vodiča je n takýchto nábojov, potom objemová hustota voľného náboja je $\rho_V = en$ a pre prúdovú hustotu dostávame:

$$j = env_s.$$

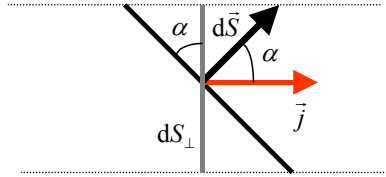
Prúdovú hustotu v danom bode môžeme vypočítať ako podiel elementárneho prúdu, ktorý tečie cez ľubovoľnú elementárnu plošku kolmú na smer prúdu v danom bode a tejto plošky. Pre elektrický prúd dI , ktorý tečie cez takúto elementárnu plošku platí:

$$dI = j dS_{\perp}$$

príčom platí, že $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$.

Elementárny prúd dI možno teda zapísať ako skalárny súčin vektorov \vec{j} a $d\vec{S}$ (Obr. 2.2), príčom vektor prúdovej hustoty má smer rýchlosti nosičov náboja \vec{v}_s

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$



Obr. 2.2

Prúd, ktorý tečie plochou S , vypočítame ako integrál cez celú danú plochu:

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (2.3)$$

Zákon zachovania elektrického náboja hovorí, že celkové množstvo náboja, ktorý vznikne v ľubovoľnom procese, je rovné nule. Je možné ho vyjadriť aj matematicky. Majme objem V , ktorý je ohraničený uzavretou plochou S . Ak prúdi náboj smerom von z uzavretej plochy, náboj Q_V vo vnútri sa musí zmenšiť o toto odpovedajúce množstvo. Zákon zachovania náboja potom môžeme vyjadriť rovnicou:

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} Q_V. \quad (2.4)$$

2.2 Ohmov zákon, Jouleov zákon

2.2.1 Ohmov zákon

K tomu, aby vo vodiči tiekol prúd, je potrebný rozdiel potenciálov. G. S. Ohm (1787 - 1854) experimentálne stanovil, že podiel rozdielu potenciálov U medzi koncami vodiča a prúdu v kovovom vodiči je konštantný

$$\frac{U}{I} = R,$$

kde R je elektrický odpor vodiča. Táto závislosť sa nazýva **Ohmov zákon**. Pre kovové vodiče je odpor konštantný a nezávislý od napätia. Jeho jednotkou je ohm (Ω).

Experimentálne bolo tiež zistené, že odpor R kovového drôtu je priamo úmerný

jeho délce l a nepriamo úmerný jeho prierezu S , takže:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

kde ρ je tzv. rezistivita a je charakteristikou materiálu.

Odpor kovov rastie s teplotou a pre nie príliš široký teplotný interval jeho závislosť na teplote možno vyjadriť lineárnou závislosťou typu:

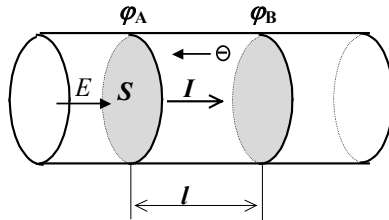
$$R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)],$$

kde R je odpor pri teplote T , R_0 je odpor pri teplote T_0 , a α je teplotný koeficient odporu.

Prevrátená hodnota rezistivity sa nazýva konduktivita γ

$$\gamma = \frac{1}{\rho},$$

jej jednotkou je $(\Omega\text{m})^{-1}$. Ohmov zákon môže byť zapísaný aj v mikroskopickom



Obr. 2.3

tvare. Ak predpokladáme, že vo vodiči (tvare drôtu) dĺžky l (Obr. 2.3) je vytvorené homogénne elektrické pole intenzity E , potom pre odpovedajúci rozdiel potenciálov môžeme písať:

$$U = El.$$

Z tejto rovnice, použijúc Ohmov zákon, dostaneme:

$$RI = \rho \frac{l}{S} I = El.$$

Ak predpokladáme homogénnu prúdovú hustotu j v priereze drôtu, dostaneme z (2.3) pre veľkosť prúdu vzťah $I = jS$. Potom pre prúdovú hustotu platí:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} E = \gamma E. \quad (2.5)$$

Prúdová hustota vo vodiči je teda priamo úmerná intenzite elektrického poľa, ktoré je vo vodiči vytvorené.

Poslednú rovnicu možno zapísať aj vo vektorovom tvare:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Je to mikroskopické vyjadrenie Ohmovho zákona - **Ohmov zákon v diferenciálnom tvare**.

Vyššie uvedené experimentálne poznatky možno pochopiť na základe jednoduchého modelu. Predpokladáme, že transport náboja je sprostredkovaný voľnými elektrónmi, ktoré pri svojom pohybe narážajú na rôzne poruchy mriežky. Z hľadiska pochopenia teplotnej závislosti významnú úlohu zohrávajú poruchy v dôsledku tepelných kmitov atómov mriežky. V našom modeli budeme predpokladať, že rýchlosť elektrónu po každej zrážke s mriežkovou poruchou klesne na nulu.

Nech časový interval medzi dvomi následnými zrážkami je τ a počas tohto časového intervalu sa elektrón pohybuje priamočiara rovnomerne zrýchlene so zrýchlením a pod vplyvom silového pôsobenia homogénneho elektrického poľa intenzity E , ktoré je vytvorené vo vodiči. Strednú rýchlosť pohybu elektrónu môžeme potom vypočítať nasledovne:

$$v_s = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} v dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} at dt = \frac{1}{\tau} \frac{a\tau^2}{2} = \frac{a\tau}{2}.$$

Zrýchlenie vyjadríme z 2. Newtonovho zákona:

$$m_0 a = eE \quad \Rightarrow \quad a = \frac{eE}{m_0},$$

kde m_0 je hmotnosť elektrónu. Ak predchádzajúci výsledok dosadíme za zrýchlenie do vzťahu pre strednú rýchlosť elektrónov, dostaneme:

$$v_s = \frac{eE}{2m_0} \tau$$

a pre prúdovú hustotu potom môžeme písať:

$$j = env_s = \frac{e^2 n \tau}{2m_0} E = \gamma E,$$

kde

$$\gamma = \frac{e^2 n \tau}{2m_0}$$

je konduktivita daného materiálu.

Takýmto spôsobom sme teda dospeli k Ohmovmu zákonu (rovnica 2.5). Konduktivita daného materiálu rastie s narastaním počtu voľných nábojových nosičov a tiež s rastom stredného časového intervalu medzi zrážkami τ . Teplotnú závislosť konduktivity ovplyvňujú v rámci takéhoto modelu dva protichodné mechanizmy. Nárast počtu voľných nosičov s teplotou (napríklad polovodiče) vedie k nárastu konduktivity. Naopak, zvyšovanie teploty vedie k nárastu intenzity tepelných kmitov atómov mriežky, zvyšuje sa pravdepodobnosť nárazu nosiča na takúto poruchu a výsledkom je zmenšenie stredného časového intervalu medzi zrážkami τ . Tento druhý mechanizmus vedie k poklesu konduktivity s narastajúcou teplotou a je dominantným v prípade kovov, kde sa n prakticky nemení s teplotou.

2.2.2 Jouleov zákon

Jednoduchý model, ktorý sme použili v predchádzajúcej časti je tiež vhodný na vysvetlenie prenosu energie od voľných nábojov na kovovú mriežku vodiča. V rámci tohto modelu sa počas jednej zrážky celá kinetická energia elektrónu odovzdá mriežke. Tento prenos energie je zodpovedný za zvýšenie vnútornej energie vodiča, ktoré sa prejaví zvýšením jeho teploty.

Energia, ktorú odovzdá jeden elektrón počas jednej zrážky, je:

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v_{max}^2$$

kde $v_{max} = a\tau$ je rýchlosť elektrónu v okamihu zrážky, teda v čase τ . Keďže $a = \frac{eE}{m_0}$, pre energiu máme:

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v_{max}^2 = \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{Ee\tau}{m_0} \right)^2 = \frac{E^2 e^2 \tau^2}{2m_0}.$$

Energia, ktorá je prenesená v objemovej jednotke vodiča počas časového intervalu τ , je:

$$E_n = nE_k = \frac{ne^2 \tau^2}{2m_0} E^2.$$

Výkon - energia odovzdaná za jednotku času v objemovej jednotke - je:

$$P_n = \frac{E_n}{\tau} = \frac{ne^2\tau}{2m_0} E^2 = \gamma E^2 = jE,$$

čo možno zapísať vo vektorovom tvare:

$$P_n = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Získali sme matematické vyjadrenie **Jouleovho zákona v diferenciálnom tvare** - z mikroskopického pohľadu.

Ak uvažujeme vodič dĺžky l a prierezu S , môžeme pre výkon v jeho objeme písať:

$$P = P_n Sl = \gamma E^2 Sl = \gamma \frac{j^2}{\gamma^2} Sl = \rho \frac{l}{S} j^2 S^2 = RI^2 = UI.$$

Táto rovnica vyjadruje **Jouleov zákon**. V tvare

$$P = UI$$

platí všeobecne, nielen pre špeciálny prípad úseku vodiča ako sme ho vyššie odvodili, a hovorí, že výkon elektrického prúdu sa rovná súčinu napätia vo vodiči a prúdu, ktorý tečie vodičom. Energia dodaná mriežke v dôsledku toku prúdu je ekvivalentná dodaniu tepla Q^* a prejaví sa navonok zahriatím vodiča. Môžeme teda písať

$$P = UI = \frac{dQ^*}{dt}$$

a

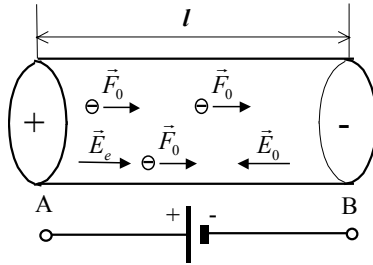
$$Q^* = \int_0^t UI dt.$$

2.3 Elektromotorické napätie

Na udržanie stáleho elektrického prúdu je potrebné zariadenie udržiavajúce stály rozdiel potenciálov - elektrické napätie - na dvoch svorkách z ktorých sa odoberá elektrický prúd. Predstavme si elektrický obvod pozostávajúci z takéhoto zariadenia - zdroja - a vodiča s odporom R . Aby bol prúd I tečúci takýmto obvodom stály, musí mať zdroj takú vlastnosť, že je schopný v každom okamihu kompenzovať pokles alebo nárast počtu nábojov na jeho svorkách, ako dôsledok prúdu. Je zrejmé, že vo vnútri zdroja pôsobia sily, zabezpečujúce uvedenú

kompenzáciu nábojov. Tieto sily nazývame „cudzími silami“. Sú to napríklad „chemické sily“ v akumulátoroch a galvanických článkoch, alebo sily pri elektromagnetickej indukcii.

Zdrojom elektromotorického napätia nazývame zariadenie v ktorom sa nejaká



Obr. 2.4

forma energie mení na elektrickú. Nech takúto vlastnosť má úsek vodiča ako je to znázornené na obrázku 2.4. Na jednotlivé voľné elektróny pôsobí „cudzia sila“ \vec{F}_0 . Intenzitu poľa cudzích síl definujeme vzťahom:

$$\vec{E}_0 = \frac{\vec{F}_0}{e}$$

Elektromotorické napätie definujeme ako podiel práce cudzej sily vykonanej pri prenesení daného náboja zdrojom elektromotorického napätia a veľkosti tohoto náboja. V zmysle tejto definície, pre situáciu na obrázku 2.4 platí:

$$\varepsilon = \frac{W_{AB}}{|e|} = \frac{\int_A^B \vec{F}_0 \cdot d\vec{l}}{|e|} = \frac{-|e| \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}}{|e|} = \int_B^A \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}. \quad (2.6)$$

Vo vodiči sa účinkom cudzích síl dostávajú elektróny na koniec B. Vytvárajú tu prebytočný záporný náboj, kým na konci A sa vytvára rovnaký prebytok kladného náboja. Takéto prerozdelenie nábojov vedie k vzniku elektrického poľa vo vodiči. Na jednotlivé elektróny pôsobí okrem cudzej sily aj sila \vec{F}_e tohoto elektrického poľa, ktorá je opačne orientovaná ako cudzia sila \vec{F}_0 . Pri otvorenom elektrickom obvode nastáva rovnováha, ak výsledná sila pôsobiaca na elektróny je nulová, tj. keď

$$\vec{F}_e + \vec{F}_0 = 0.$$

Ak označíme symbolom \vec{E}_e intenzitu vytvoreného elektrického poľa, zrejme platí:

$$\vec{E}_e = -\vec{E}_0. \quad (2.7)$$

Uvažujme naďalej otvorený (nezaťažený) zdroj. V súlade s označením na obrázku 2.4, pre rozdiel potenciálov medzi koncovými bodmi zdroja, čiže elektrické napätie, platí:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E}_e \cdot d\vec{l}. \quad (2.8)$$

Zo vzťahov (2.6), (2.7) a (2.8) postupne dostaneme:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = \int_B^A \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = \varepsilon.$$

Vidíme, že napätie na svorkách nezaťaženého zdroja je rovné jeho elektromotorickému napätiu.

Vytvoríme teraz uzavretý elektrický obvod tak, že konce zdroja A, B spojíme vodičom, ktorého elektrický odpor je R . Vo vodiči nastane usmerný pohyb elektrónov z miesta B, kde je ich prebytok, na miesto A, kde je ich nedostatok. V dôsledku toho sa naruší rovnováha poľa cudzích síl a elektrického poľa vo vnútri zdroja. V zdroji opäť na okamih prevládajú cudzie sily a vo vnútri zdroja prebieha pohyb elektrónov obnovujúci elektrické náboje na svorkách zdroja. Takto sa v uzavretom elektrickom obvode udržuje stály elektrický prúd, ktorého veľkosť závisí na veľkosti elektromotorického napätia zdroja.

Elektrostatické pole je konzervatívne a teda pre čiarový integrál cez uzavretý elektrický obvod platí:

$$\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = 0.$$

Výsledné elektrické pole v ľubovoľnom bode obvodu je dané vzťahom:

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_0.$$

Počítajme teraz čiarový integrál z tohto poľa cez celý uzavretý elektrický obvod:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = \int_{B \dots zdroj}^A \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} + \int_{A \dots R}^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = \varepsilon. \quad (2.9)$$

Na základe poslednej rovnice môžeme interpretovať elektromotorické napätie aj ako prácu, ktorú vykoná výsledné elektrické pole o intenzite \vec{E} pri prenesení kladného jednotkového náboja celým uzavretým obvodom.

Doteraz sme zanedbávali skutočnosť, že aj zdroj môže klásť odpor pohybu nábojov. V skutočnosti aj zdroj má nenulový odpor. Z (2.9) dostaneme

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{B \dots \text{zdroj}}^A \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{A \dots R}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_v + U_{AB},$$

kde U_v je napätie vzniknuté prechodom prúdu cez vnútorný odpor zdroja r_v a U_{AB} je tzv. **svorkové napätie** na vonkajšom odpore R . Z Ohmovho zákona dostaneme:

$$\varepsilon = U_v + U_{AB} = r_v I + RI$$

alebo

$$U_{AB} = \varepsilon - U_v = \varepsilon - r_v I.$$

Pri prechode prúdu je teda svorkové napätie rovné elektromotorickému napätiu zmenšenému o úbytok napätia na vnútornom odpore zdroja.