5 Maxwellove rovnice

Škótsky fyzik James Clerk Maxwell ukázal, že všetky elektrické a magnetické javy môžu byť opísané pomocou štyroch rovníc zahŕňajúcich elektrické a magnetické pole. Tieto štyri rovnice, známe ako Maxwellove rovnice, sú také fundamentálne ako Newtonove zákony.
Zákon celkového prúdu (rovnica (3.16)), ktorý vyjadruje skutočnosť, že v okolí vodiča, ktorým tečie prúd, vzniká magnetické pole, možno zapísať v tvare

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I.$$

Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie (rovnica (4.1)) hovorí, že ak sa mení v čase magnetické pole, vzniká elektrické pole:

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Gaussov zákon v elektrickom poli (rovnica (1.29)) dáva do súvisu elektrické pole s jeho zdrojom - elektrickým nábojom

$$\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q.$$

Gaussov zákon v magnetickom poli (rovnica (3.3)) vyjadruje skutočnosť, že magnetické indukčné čiary sú do seba uzavreté krivky, ktoré nemajú počiatok ani koniec (ako elektrické siločiary majú svoj počiatok v náboji), teda:

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Spoločne s týmito Maxwellovými rovnicami v tzv. integrálnom tvare sa niekedy súčasne zapisujú rovnice vyjadrujúce vlastnosti materiálu:

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E},$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

a

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Maxwellove rovnice môžu byť zapísané aj v inom, takzvanom diferenciálnom tvare, ktorý je často vhodnejší ako integrálny tvar.

Aby sme transformovali Maxwellove rovnice z integrálneho do diferenciálneho tvaru, budeme využívať dve vety známe z vektorovej analýzy. Prvá je tzv. Gaussova veta, ktorá dáva do súvisu integrál cez uzavretú plochu z vektorovej funkcie s jej integrovaním cez objem ohraničený danou plochou:

$$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} \mathrm{d}V = \int_V \mathrm{div}\vec{F} \mathrm{d}V, \tag{5.1}$$

kde ∇ je operátor, ktorý je definovaný:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

a

$$\mathrm{div}\vec{F} = \nabla \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

je tzv. divergencia $\vec{F}$.
Druhá veta je Stokesova veta, ktorá dáva do súvisu integrál po uzavretej krivke s plošným integrálom cez ľubovoľnú plochu, ktorú daná krivka ohraničuje:

$$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

kde $\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ sa nazýva rotácia $\vec{F}$.
Najprv využijeme uvedenú Gaussovu vetu na prepísanie zákona zachovania náboja do diferenciálneho tvaru. Zákon zachovania náboja sme matematicky zapísali (rovnica (2.4)):

$$\oint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_V.$$

Náboj Q_V v objeme ohraničenom uzavretou plochou S možno zapísať ako objemový integrál cez tento objem z nábojovej hustoty ρ_V:

$$Q_V = \int_V \rho_V \mathrm{d}V.$$

Použijúc Gaussovu vetu (5.1), dostaneme

$$\int_V \mathrm{div}\vec{j} \mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho_V \mathrm{d}V = \int_V -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \mathrm{d}V.$$

Keďže táto rovnica platí pre ľubovoľný objem, zákon zachovania náboja možno zapísať aj v nasledovnom (diferenciálnom) tvare:

$$\mathrm{div}\vec{j} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}.$$

Teraz prejdeme k odvodeniu Maxwellových rovníc v diferenciálnom tvare.
Najprv budeme aplikovať Stokesovu vetu na ľavú stranu zákona celkového prúdu a zapíšeme prúd pomocou prúdovej hustoty. Môžeme písať

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = I = \int_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

teda

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Táto rovnica platí pre akúkoľvek integračnú plochu S, ľubovoľnej veľkosti i tvaru, teda výrazy pod integrálmi sa musia rovnať:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}.$$

Je tu ale jedna veľmi dôležitá vec, ktorú treba spomenúť v súvislosti s prvou Maxwellovou rovnicou. Maxwell si všimol, že tu je niečo zvláštne. Divergencia ľavej strany tejto rovnice bude rovná nule, pretože divergencia rotácie je vždy nulová ($\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\vec{H}\right) = 0$). To znamená, že aj jej pravá strana, teda divergencia $\vec{j}$, má byť tiež nulová. Ale ak $\mathrm{div}\vec{j}$ je nula, potom celkový tok prúdu von z ľuboľnej uzavretej plochy je rovný nule. Ako vieme z rovnice $\mathrm{div}\vec{j} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$, tok náboja cez uzavretú plochu je rovný úbytku náboja v objeme ohraničenom touto plochou. Tento samozrejme nemôže byť vo všeobecnosti nulový, lebo náboje sa môžu pohybovať z miesta na miesto. Maxwell predvídal tento problém a navrhol pridať do rovnice ďalší člen na jej pravú stranu - tzv. posuvný prúd.
Z rozmerovej analýzy je jasné, že výraz $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ vyjadruje prúdovú hustotu a nazýva sa hustota posuvného prúdu

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Celková prúdová hustota je rovná sume hustôt vodivostných a posuvných prúdov a **1. Maxwellova rovnica** má tvar:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Aplikujme teraz Stokesovu vetu na ľavú stranu Faradayovho zákona. Môžeme písať

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_S \mathrm{rot}\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

teda

$$\int\limits_S \mathrm{rot}\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Sú to plošné integrály cez tú istú plochu, a keďže rovnica musí platiť pre ľubovoľnú plochu, platí

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

čo je **2. Maxwellova rovnica**.
Ak aplikujeme Gaussovu vetu (5.1) na Gaussov zákon elektrického poľa a náboj Q napíšeme ako objemový integrál z nábojovej hustoty, máme

$$\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_V \mathrm{div}\vec{D}\mathrm{d}V = Q = \int\limits_V \rho \mathrm{d}V$$

teda

$$\int\limits_V \mathrm{div}\vec{D}\mathrm{d}V = \int\limits_V \rho \mathrm{d}V.$$

Obe strany obsahujú objemový integrál cez ten istý objem, aby rovnica platila pre ľubovoľný objem (ľubovoľnej veľkosti a tvaru), výrazy pod integrálom musia byť zhodné:

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho.$$

Táto rovnica je **3. Maxwellova rovnica.**
Podobne získame štvrtú Maxwellovu rovnicu - Gaussov zákon magnetizmu:

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_V \mathrm{div}\vec{B}\mathrm{d}V = 0$$

a teda

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0,$$

čo je **4. Maxwellova rovnica**.

5.1 Zákon zachovania elektromagnetickej energie, Poyntingov vektor

Uvažujme izotropné prostredie. Energia elektromagnetického poľa v nejakom objeme V je daná

$$W = \int_V w \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2} \int_V \left(\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2 \right) \mathrm{d}\tau.$$

Zmena tejto energie za jednotku času je

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \int_V \left(\varepsilon 2\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu 2\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \mathrm{d}\tau = \int_V \left(\varepsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \mathrm{d}\tau.$$

Použijúc Maxwellove rovnice $\mathrm{rot}\vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$ a $\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, po úpravách máme:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{-\vec{j}}{\varepsilon} + \frac{\mathrm{rot}\vec{H}}{\varepsilon}, \qquad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\mathrm{rot}\vec{E}}{\mu},$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= \int_V \left[\varepsilon \vec{E} \cdot \left(\frac{-\vec{j}}{\varepsilon} + \frac{\mathrm{rot}\vec{H}}{\varepsilon} \right) + \mu \vec{H} \cdot \left(-\frac{\mathrm{rot}\vec{E}}{\mu} \right) \right] \mathrm{d}\tau = \\ &= \int_V \left[\vec{E} \cdot \mathrm{rot}\vec{H} - \vec{H} \cdot \mathrm{rot}\vec{E} \right] \mathrm{d}\tau - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Teraz využijeme Ohmov zákon $\vec{E} = \rho \vec{j}$ a rovnosť $\mathrm{div}\left(\vec{b} \times \vec{a} \right) = \vec{a} \cdot \mathrm{rot}\vec{b} - \vec{b} \cdot \mathrm{rot}\vec{a}$ a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\int_V \mathrm{div}\left(\vec{E} \times \vec{H} \right) \mathrm{d}\tau - \int_V \rho \vec{j}^2 \mathrm{d}\tau.$$

Použijúc Gaussovu (5.1) vetu máme

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\oint \left(\vec{E} \times \vec{H} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} - \int_V \rho \vec{j}^2 \mathrm{d}\tau,$$

kde plošný integrál na pravej strane rovnice je cez plochu, ktorá obopína uvažovaný objem.

Vektor

$$\vec{\sigma} = \vec{E} \times \vec{H}$$

je známy ako **Poyntingov vektor** a poslednú rovnicu môžeme písať v tvare:

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \oint \vec{\sigma} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int\limits_V \rho \vec{j}^2 \mathrm{d}\tau.$$

Táto rovnica vyjadruje **zákon zachovania elektromagnetickej energie**. Výraz $-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ predstavuje úbytok energie elektromagnetického poľa v danom objeme za jednotku času. To sa môže diať dvoma spôsobmi. Prvým je tok energie cez ohraničujúcu plochu daný výrazom $\oint \vec{\sigma} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$, druhým je strata energie v dôsledku prúdenia voľných nábojov v uvažovanom objeme daná výrazom $\int\limits_V \rho \vec{j}^2 \mathrm{d}\tau$.

Vidíme, že Poyntingov vektor $\vec{\sigma}$ je kolmý na vektory $\vec{E}$ a $\vec{H}$. Vyjadruje energiu elektromagnetického poľa, ktorá je vyžiarená cez jednotkovú plochu za jednotku času v ľubovoľnom časovom okamihu. Má smer šírenia energie, teda smer Poyntingovho vektora je daný smerom šírenia sa elektromagnetického vlnenia ako uvidíme v nasledujúcej časti.