1 Elektrostatické pole

1.1 Coulombov zákon

Elektrické pole je oblasť priestoru, kde sa prejavuje silové pôsobenie elektrického náboja na iný elektrický náboj bez ich vzájomného dotyku. **Elektrostatické pole** vzniká v okolí každého elektrického náboja, ktorý je v pokoji, a je špeciálnym prípadom elektromagnetickej interakcie, ktorej magnetická zložka je nulová. Takéto elektrické pole sa v čase nemení.

Zo skúsenosti vieme, že existujú dva typy náboja - kladný a záporný. Náboje rovnakého typu sa odpudzujú a náboje rôzneho typu sa priťahujú. Ďalší empirický poznatok hovorí, že celkové množstvo elektrického náboja v ľubovoľnom procese sa nemení. Túto skutočnosť vyjadruje **zákon zachovania elektrického náboja**.

Atóm sa skladá z ťažkého, kladne nabitého jadra (zloženého z kladne nabitých protónov a neutrálnych neutrónov), ktoré je obklopené záporne nabitými elektrónmi. V elektricky neutrálnom atóme je počet kladných a záporných nábojov rovnaký. Veľkosť náboja jedného protónu a jedného elektrónu je $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C a nazýva sa **elementárny náboj**. Jednotkou elektrického náboja v sústave jednotiek SI je coulomb (C). Jednotka coulomb je definovaná ako množstvo náboja, ktoré pretečie cez ľubovoľný prierez vodiča za 1 sekundu, ak vodičom tečie konštantný elektrický prúd 1 A.

Zákon popisujúci vzájomné silové pôsobenie medzi nábojmi sformuloval na základe experimentálneho štúdia elektrického priťahovania a odpudzovania Ch. A. Coulomb (1736 - 1806). Obsahom tohto zákona je tvrdenie, že veľkosť sily, ktorou vzájomne pôsobia na seba vo vákuu dva bodové náboje, je priamo úmerná súčinu veľkosti nábojov a nepriamo úmerná kvadrátu vzdialenosti medzi nimi:

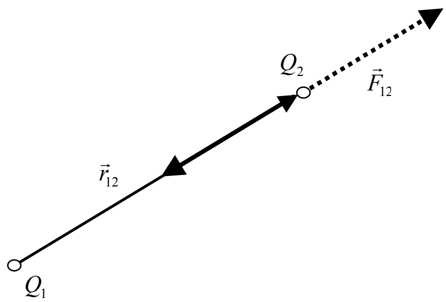
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \tag{1.1}$$

kde $\varepsilon_0 = 8,85418 \cdot 10^{-12}$ $\mathrm{A^2kg^{-1}m^{-3}s^4}$ je elektrická konštanta, Q_1, Q_2 sú uvažované bodové náboje a r je vzdialenosť medzi nábojmi.

Rovnica (1.1) vyjadruje veľkosť sily vzájomného pôsobenia medzi bodovými nábojmi, pričom jej smer spadá do smeru spojnice uvažovaných nábojov. Uvedomujúc si túto skutočnosť možno veľmi ľahko prejsť k vektorovému vyjadreniu tejto sily. Vektorové vyjadrenie **Coulombovho zákona** má tvar:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}. \tag{1.2}$$

$\vec{F}_{12}$ je sila, ktorou pôsobí náboj Q_1 na náboj Q_2 a $\vec{r}_{12}$ je polohový vektor náboja Q_2 vzhľadom k náboju Q_1. Náboje Q_1 a Q_2 môžu byť kladné alebo záporné a podľa toho bude orientovaná elektrická sila (pozri Obr.1.1). Ak náboje Q_1 a Q_2 majú rovnaké znamienka, vektory $\vec{r}_{12}$ a $\vec{F}_{12}$ sú rovnosmerné (paralelné) (vyznačené čiarkovane na Obr.1.1 - ide o odpudivú silu). Ak sú znamienka nábojov Q_1 a Q_2 opačné, vektory $\vec{r}_{12}$ a $\vec{F}_{12}$ sú opačného smeru (antiparalelné) (vyznačené plnou čiarou na Obr.1.1 - ide o príťažlivú silu).
Coulombov zákon platí pre bodové náboje, alebo pre objekty, ktorých rozmery



Obr. 1.1

sú zanedbateľne malé v porovnaní s ich vzájomnou vzdialenosťou. Ak je nábojov viac, výsledná sila pôsobiaca na jednotlivý náboj, bude rovná vektorovému súčtu síl medzi týmto nábojom a všetkými ostatnými. Ak je za daných podmienok možné považovať rozloženie náboja za spojité, sumu nahradíme integrálom.

1.2 Intenzita elektrostatického poľa

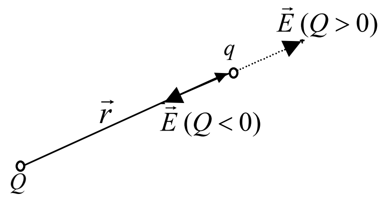
Na popis elektrostatického poľa je vhodné zaviesť novú veličinu, ktorú budeme nazývať **intenzita elektrického poľa**. Môžeme to urobiť nasledovným spôsobom. Umiestnime malý testovací bodový náboj q (pre jednoduchosť uvažujme kladný náboj) do bodu, kde chceme pole vyšetrovať, a odmeriame elektrostatickú silu $\vec{F}$, ktorá pôsobí na tento náboj. Intenzitu elektrického poľa $\vec{E}$ v tomto mieste definujeme vzťahom:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \tag{1.3}$$

Intenzita elektrického poľa (Obr. 1.2) predstavuje silu pôsobiacu na testovací náboj predelenú veľkosťou tohto náboja a nezávisí teda od testovacieho náboja. Jednotkou intenzity elektrického poľa v sústave SI je:

$$[E] = \frac{[F]}{[q_0]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

Použijúc vzťahy (1.2) a (1.3) môžeme intenzitu elektrického poľa v okolí bodo-



Obr. 1.2

vého náboja Q vyjadriť vzťahom:

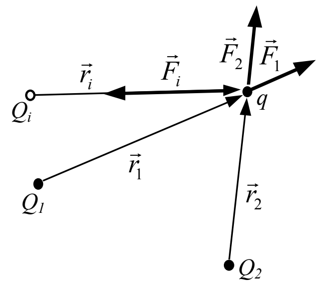
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^3}\vec{r}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r}.$$

Ak je pole vytvárané viacerými bodovými nábojmi Q_i (pozri Obr.1.3), platí:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{q} = \frac{\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i q}{r_i^3}\vec{r}_i}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{r_i^3}\vec{r}_i = \sum_i \vec{E}_i. \qquad (1.4)$$

Rovnica (1.4) je príkladom princípu superpozície, ktorý v tomto prípade hovorí, že výsledná intenzita elektrického poľa v danom mieste je vektorovým súčtom intenzít polí vytvorených jednotlivými nábojmi.
Princíp superpozíce možno využiť aj pre výpočet intenzity elektrického poľa v okolí telies so spojite rozloženým nábojom. Ako uvidíme v ďalšom, náboj môže byť rozložený jednak v objeme (objemový náboj), ale tiež aj v tenkej povrchovej vrstve nabitého telesa (plošný náboj).
Pre opis rozloženia objemového náboja definujeme veličinu objemová hustota náboja:

$$\rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V},$$

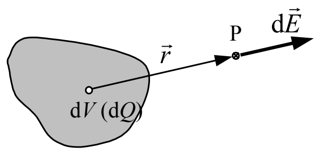


Obr. 1.3

kde dQ je elementárny náboj nachádzajúci sa v elementárnom objeme dV.
Podobne pre opis rozloženia náboja na povrchu telesa definujeme veličinu plošná hustota náboja:

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S},$$

kde dQ je elementárny náboj rozložený na elementárnej ploche dS.
Intenzita elektrického poľa pre náboj rozložený v objeme s objemovou hustotou



Obr. 1.4

ρ môže byť pomocou princípu superpozície vyjadrená vzťahom (pozri Obr.1.4):

$$\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho \mathrm{d}V}{r^3} \vec{r},$$

pričom integrujeme cez celý objem V, v ktorom je náboj rozložený.
Podobne môžeme vyjadriť pole pre prípad, že náboj je rozložený na povrchu

telesa s plošnou hustotou σ:

$$\vec{E} = \int\limits_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma \mathrm{d}S}{r^3} \vec{r}$$

a integrujeme cez celú plochu S, na ktorej je náboj rozložený.
Elektrické pole môžeme znázorniť pomocou **elektrických siločiar**. Ich vlastnosti možno zhrnúť takto:

1. Dotyčnica k siločiare v každom bode určuje smer intenzity $\vec{E}$ v tomto bode.

2. Siločiary sa navzájom nepretínajú. Počet siločiar na jednotku prierezu (kolmo na siločiary) je úmerný veľkosti intenzity $\vec{E}$. Ak sú teda siločiary blízko k sebe, intenzita poľa E je väčšia, ak sú siločiary vzájomne vzdialené, intenzita poľa E je menšia.

3. Siločiary majú začiatok iba na kladných nábojoch a končia iba na záporných nábojoch.

1.3 Tok intenzity elektrostatického poľa, Gaussov zákon

Pri úvahách v tejto časti si môžeme pomôcť predstavou elektrických siločiar, ktorých vlastnosti boli uvedené v predchádzajúcej časti. Uvažujme elementárnu plôšku dS v elektrostatickom poli, ktoré môže byť vo všeobecnosti nehomogénne. Táto elementárna plôška je taká malá, že môže byť považovaná za rovinnú a pole možno pokladať za konštantné pre všetky body tejto plôšky (pozri Obr.1.5). Pomocou predstavy o siločiarach môžeme vyjadriť **tok vektora intenzity** $\mathrm{d}T_E$, ktorý je úmerný počtu siločiar prechádzajúcich cez danú plôšku:

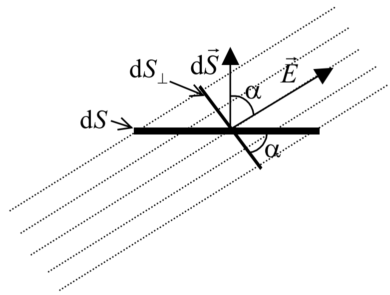
$$\mathrm{d}T_E = E\mathrm{d}S_\perp = E\mathrm{d}S\cos\alpha, \tag{1.5}$$

kde $\mathrm{d}S_\perp$ je priemet dS na rovinu kolmú na $\vec{E}$ a α je uhol medzi dS a $\mathrm{d}S_\perp$.
Je zrejmé, že tok vektora intenzity elektrického poľa cez danú plôšku je úmerný počtu siločiar prechádzajúcich cez danú plôšku.
Ak zavedieme vektor

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{n},$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor kolmý na elementárnu plôšku dS, zrejme platí

$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{E} \cdot \vec{n} = E\mathrm{d}S\cos\alpha. \tag{1.6}$$



Obr. 1.5

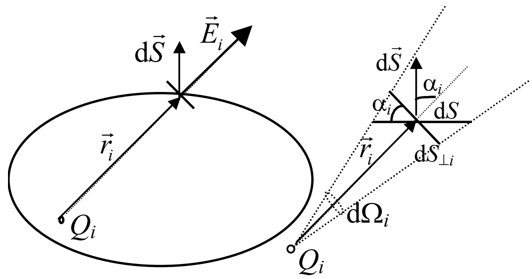
Z porovnania rovníc (1.5) a (1.6) dostávame:

$$\mathrm{d}T_E = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{1.7}$$

Táto rovnica definuje tok vektora $\vec{E}$ cez elementárnu plôšku $\mathrm{d}S$.
Gaussov zákon sa týka toku intenzity cez ľubovoľnú uzavretú plochu, teda cez plochu, ktorá úplne obopína určitý objem (napríklad guľu). Orientáciu $\mathrm{d}S$ pre uzavretú plochu definujeme v smere von z uzavretého objemu. Potom tok pre siločiary vychádzajúce z uzavretého objemu je kladný a tok pre siločiary vchádzajúce do neho je záporný.
Tok intenzity cez uzavretú plochu je daný vzťahom:

$$T_E = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

pričom sa integruje cez celú uzavretú plochu S. Ako už vieme, tok intenzity cez plochu je úmerný počtu elektrických siločiar prechádzajúcich plochou a zároveň siločiara môže začínať a končiť len v mieste náboja. Ak sa v uvažovanom objeme nenachádzajú náboje, každá siločiara začína aj končí mimo tohto objemu. Koľkokrát takáto siločiara prejde do daného objemu cez uzavretú ohraničujúcu plochu, toľkokrát musí z objemu cez túto plochu aj vystúpiť. Veľmi ľahko prídeme takto k záveru, že tok intenzity cez uzavretú plochu je nenulový iba v prípade, ak niektoré siločiary majú počiatok alebo koniec v objeme, ktorý je plochou obopínaný. Inými slovami, tok bude nenulový len vtedy, keď sa v danom objeme nachádzajú náboje. Predpokladajme preto, že plocha S obopína



Obr. 1.6

elektrické náboje $Q_1, Q_2, ...Q_i, ...$ (Obr. 1.6).
Využijúc princíp superpozície, môžeme písať

$$T_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \oint_S \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^3} \vec{r}_i \cdot d\vec{S} =$$

$$= \oint_S \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^3} r_i dS_{\perp i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{dS_{\perp i}}{r_i^2}.$$

Ak $d\Omega_i$ je priestorový uhol pod ktorým vidíme plôšku dS z miesta uvažovaného náboja, platí:

$$dS_{\perp i} = r_i^2 d\Omega_i$$

a teda:

$$T_E = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{dS_{\perp i}}{r_i^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} Q_i \int_0^{4\pi} d\Omega_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\varepsilon_0}.$$

Gaussov zákon, ktorý môžeme vyjadriť takto:

$$T_E = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

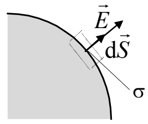
hovorí, že tok intenzity cez ľubovoľnú uzavretú plochu je rovný náboju, ktorý táto plocha obopína, predelenému elektrickou konštantou vákua.
Je treba mať na pamäti, že Q je výsledný náboj - algebraický súčet všetkých nábojov (berúc do úvahy ich znamienka), pričom nezáleží na tom, kde a ako je náboj v danom objeme rozložený.

1.3.1 Niektoré aplikácie Gaussovho zákona

1. Elektrické pole pri povrchu vodivých nabitých telies
V prípade statickej situácie, t.j. ak sú náboje v pokoji, elektrické pole vo vnútri vodivého telesa musí byť nulové. Ak by intenzita elektrického poľa bola nenulová, na voľné náboje, ktoré sa nachádzajú vo vnútri vodivého telesa, by pôsobila sila $\vec{F} = e\vec{E}$ a tieto náboje by sa dali do usmerneného pohybu, to znamená, že vo vodiči by tiekol elektrický prúd. Takýto prúd ale nebol pozorovaný.
Smer vektora intenzity poľa $\vec{E}$, pre body blízke povrchu, je kolmý na plochu povrchu a pre kladný náboj je orientovaný von z plochy. Ak by vektor $\vec{E}$ nebol kolmý na povrch, mal by zložku v rovine povrchu. Táto zložka by pôsobila na voľné náboje na povrchu a spôsobila by povrchové prúdy. Keďže takéto prúdy neboli pozorované, zložka vektora $\vec{E}$ v rovine povrchu musí byť nulová a teda vektor $\vec{E}$ musí byť kolmý na povrch.
Skutočnosť, že elektrické pole je vo vnútri vodivého telesa nulové, má jeden zaujímavý dôsledok: Každý náboj privedený na vodivé teleso sa rozloží v povrchovej vrstve. Dokážeme to pomocou Gaussovho zákona.
Majme vodivé teleso, ktoré je nabité nábojom Q. Uvažujme ľubovoľný objem vo vnútri telesa, ktorý obopína uzavretá plocha S. Elektrické pole vo všetkých bodoch tejto plochy je nulové, takže tok intenzity cez túto plochu je nulový. Z Gaussovho zákona je zrejmé, že potom algebraický súčet nábojov vo vnútri tejto plochy je nulový. Keďže to platí pre ľubovoľnú uzavretú plochu vnútri telesa, vnútro nabitého vodivého telesa je elektroneutrálne. Náboj Q, privedený na takéto teleso, môže byť rozložený len v povrchovej vrstve telesa. Gaussov zákon umožňuje určiť veľkosť elektrického poľa E tesne pri povrchu ľubovoľného nabitého telesa.

Majme vodivé teleso, na povrchu ktorého je rozložený náboj Q s plošnou hustotou σ. Ako uzavretú integračnú plochu si zvolíme valcovú plochu so základňou $\mathrm{d}S$ veľmi malej výšky, takže jedna základňa valca je tesne pod povrchom telesa a druhá základňa je tesne nad jeho povrchom a plášť obopína plôšku povrchu telesa veľkosti $\mathrm{d}S$, na ktorej je náboj $\mathrm{d}Q$ (pozri Obr. 1.7). Výška valca je kolmá na povrch telesa. Elektrické pole je vo vnútri telesa nulové a tesne nad povrchom má smer kolmý na povrch, aj na vektor plochy plášťa valca v každom jeho bode. Preto tok intenzity je nenulový iba cez vonkajšiu základňu valcovej plochy. Plocha $\mathrm{d}S$ základne valca je malá, takže pole môžeme považovať všade na nej za konštantné. Potom z Gaussovho zákona máme

$$\mathrm{d}T_E = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \mathrm{d}S}{\varepsilon_0},$$



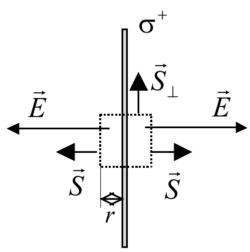
Obr. 1.7

kde σ je plošná hustota náboja na povrchu telesa.
Takto sme dostali pre veľkosť intenzity elektrického poľa tesne nad povrchom nabitého vodivého telesa výsledok

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

ktorý platí pre teleso ľubovoľného tvaru.

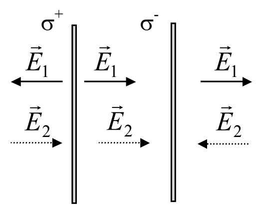
2. Elektrostatické pole v okolí nekonečnej nabitej roviny.
Majme rovinu, na ktorej je kladný náboj, ktorý je rozložený rovnomerne, s plošnou hustotou σ. Aby sme určili intenzitu elektrického poľa, vyberieme si uzavretú valcovú plochu so základňami S a výškou $2r$ okolo roviny tak ako je to na Obr. 1.8. Očakávame kvôli symetrii, že $\vec{E}$ je kolmé na rovinu z oboch strán a je homogénne na oboch základniach vybranej valcovej plochy. Keďže $\vec{E}$ je v každom bode plochy plášťa valca kolmé na jej vektor, tok cez plášť valcovej plochy je nulový a do celkového toku prispieva iba tok cez základne. Z Gaussovho zákona dostávame:



Obr. 1.8

$$T_E = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E2S = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Vidíme, že pole je všade rovnaké, E má rovnakú hodnotu pre body blízke k rovine i pre body od nej vzdialené. V prípade záporného náboja sa vektor intenzity zmení na opačný.
Majme teraz rovnomerne rozložený náboj na dvoch rovnobežných rovinách. Prvá z nich nech je nabitá kladným nábojom a druhá záporným nábojom, obe s nábojovou hustotou σ, pozri Obr. 1.9.
Určíme elektrostatické pole medzi týmito rovinami a mimo nich. K tomu využi-



Obr. 1.9

jeme princíp superpozície. Vidíme, že pre veľkosť intenzity poľa medzi rovinami platí

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

a všade inde

$$E = E_2 - E_1 = 0.$$

1.4 Práca a potenciálna energia v elektrostatickom poli, elektrický potenciál

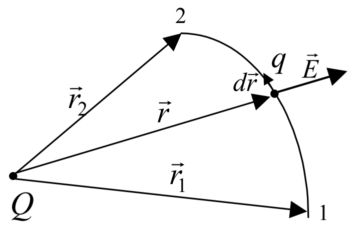
Elektrostatické pole vytvorené v okolí nabitých telies môže byť popísané nielen pomocou vektora $\vec{E}$, ale aj pomocou skalárnej veličiny φ, ktorá sa nazýva **elektrický potenciál**. Táto skalárna veličina je definovaná pomocou potenciálnej energie náboja v elektrickom poli.
Predstavme si kladný náboj q uložený v elektrostatickom poli intenzity $\vec{E}$. Sila $\vec{F}_{el}$, ktorá pôsobí na tento náboj, je daná vzťahom:

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E}.$$

Práca vykonaná touto silou pri premiestnení náboja q z bodu 1 do bodu 2 je:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{el} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{1.8}$$

Nech je elektrické pole $\vec{E}$ vytvorené kladným bodovým nábojom Q a $\vec{r}$ je



Obr. 1.10

polohový vektor náboja q vzhľadom na náboj Q (Obr. 1.10). **Práca** vykonaná poľom náboja Q, pri premiestnení náboja q z bodu 1 do bodu 2, je

$$\begin{aligned} W &= q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \tfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \tfrac{\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{r^3} = \tfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \tfrac{\mathrm{d}r}{r^2} = \\ &= \tfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\tfrac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \tfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \tfrac{1}{r_1} - \tfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \tfrac{1}{r_2} \end{aligned} \tag{1.9}$$

a závisí iba od polohy týchto bodov a nezávisí od prejdenej dráhy. Z (1.9) je tiež vidno, že ak sa náboj q pohybuje po uzavretej dráhe, t.j. vráti sa do východiskového bodu, práca elektrostatickej sily je rovná nule. Je to základná vlastnosť elektrostatického poľa a môžeme ju zapísať vzťahom

$$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0.$$

Táto rovnica hovorí, že elektrostatická sila je **konzervatívna sila**. Teda náboj v elektrostatickom poli má potenciálnu energiu E_p, ktorej zmena súvisí s prácou síl elektrostatického poľa podľa nasledovného vyťahu

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = -W = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{el}.\mathrm{d}\vec{r} = -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

V poli bodového náboja môžeme písať

$$\Delta E_p = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_2} - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1}.$$

Potenciál φ elektrostatického poľa definujeme ako podiel potenciálnej energie bodového náboja q v danom mieste a tohto náboja:

$$\varphi = \frac{E_p}{q}.$$

Pre rozdiel elektrických potenciálov medzi bodmi 1 a 2 máme

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{E_{p2}}{q} - \frac{E_{p1}}{q} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{1.10}$$

Pre elementárnu zmenu elektrického potenciálu

$$d\varphi = -\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{1.11}$$

V špeciálnom prípade bodového náboja

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta E_p}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

alebo

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C,$$

kde C je konštanta, ktorej hodnota závisí od voľby vzťažného bodu 1.
Za tento bod (dohodou) berieme spravidla nekonečno a elektrický potenciál v tomto bode je rovný nule. V tomto prípade pre elektrický potenciál v bode 2 dostávame

$$\varphi_2 = -\int_{\propto}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

a pre **elektrický potenciál v poli bodového náboja** vo vzdialenosti r máme

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}. \tag{1.12}$$

Potenciál môže byť graficky zobrazený **ekvipotenciálnymi čiarami** alebo (v trojrozmernom prípade) **ekvipotenciálnymi plochami**. Je to množina bodov s rovnakým potenciálom, t. j. $\mathrm{d}\varphi = 0$ a na premiestnenie náboja z jedného bodu do druhého nie je potrebná žiadna práca. Ekvipotenciálna plocha musí byť v každom bode kolmá na intenzitu elektrostatického poľa pretože podľa vzťahu (1.11) ak $\mathrm{d}\varphi = 0$, potom vektory $\vec{E}$ a $\mathrm{d}\vec{r}$ musia byť na seba kolmé.
Potenciál v ľubovoľnom bode poľa vytvoreného viacerými bodovými nábojmi sa nájde vypočítaním potenciálu φ_i od každého jednotlivého náboja, ako keby iné náboje neboli, a sčítaním takto získaných hodnôt:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i}.$$

Ak je náboj rozložený spojite, suma sa nahradí integrálom

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}Q}{r},$$

kde $\mathrm{d}Q$ je element náboja a r je jeho vzdialenosť od bodu, v ktorom sa φ počíta.
Prácu síl poľa vykonanú pri premiestnení náboja q z bodu 1 do bodu 2 danú vzťahom (1.8), s využitím vzťahu (1.10) môžeme vyjadriť nasledovne:

$$W = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = q\,(\varphi_1 - \varphi_2) = qU, \tag{1.13}$$

kde

$$U = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = (\varphi_1 - \varphi_2)$$

je **elektrické napätie** medzi bodmi 1 a 2. Teda elektrické napätie na istom úseku dráhy sa rovná rozdielu elektrických potenciálov medzi koncovými bodmi uvažovaného úseku dráhy. Jednotkou napätia je 1 volt (V).
Teraz vyjadríme súvis medzi intenzitou elektrického poľa $\vec{E}$ a elektrickým potenciálom φ. Budeme uvažovať dva blízke body (x, y, z) a $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$. Zmena elektrického potenciálu pri prechode z prvého bodu do druhého je

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

podľa (1.11) je:

$$\mathrm{d}\varphi = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -E_x \mathrm{d}x - E_y \mathrm{d}y - E_z \mathrm{d}z$$

a z porovnania posledných dvoch rovníc:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

alebo

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi.$$

Znamienko mínus zohľadňuje skutočnosť, že intenzita poľa je orientovaná od oblasti kladného potenciálu k oblasti záporného potenciálu, kým vektor gradφ je podľa definície orientovaný v smere narastania φ. Na kladný náboj v elektrostatickom poli pôsobí sila smerujúca od miesta s vyšším potenciálom do miesta s nižším potenciálom. Jednotkou elektrického potenciálu je joule/coulomb = volt (V).

1.5 Pohyb nabitej častice v elektrickom poli

Preskúmame pohyb častice s hmotnosťou m a nábojom q, ktorá sa pohybuje v homogénnom elektrickom poli. Homogénnym elektrickým poľom nazývame pole, v ktorom má vektor intenzity v každom bode rovnaký smer a veľkosť, t. j. $\vec{E}$ = konšt.. Z praktické hľadiska sú najzaujímavejšie prípady pohybu častice v pozdĺžnom a priečnom elektrickom poli. O pohybe v pozdĺžnom elektrickom poli hovoríme, keď častica vletí do poľa tak, že jej počiatočná rýchlosť $\vec{v}_0$ je rovnobežná s vektorom intenzity poľa $\vec{E}$. O pohybe v priečnom poli hovoríme, keď počiatočná rýchlosť je kolmá na vektor intenzity poľa.

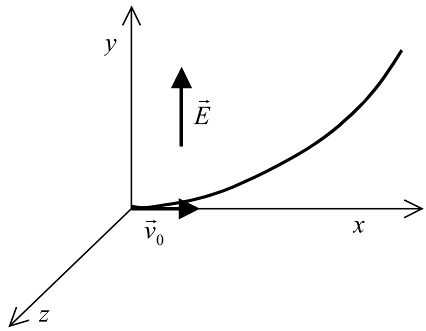
Ak má veľkosť rýchlosti náboja q v homogénnom elektrickom poli v mieste s potenciálom φ_1 hodnotu v_0, v dôsledku pôsobenia elektrostatickej sily náboj prejde do miesta s potenciálom φ_2, kde bude mať jeho rýchlosť veľkosť v. Využijúc vetu o kinetickej energii a vzťah (1.13), pre pohyb v **pozdĺžnom poli** platí:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = qU.$$

Pre opis pohybu častice v priečnom poli si zvoľme súradnicovú sústavu tak, ako je na Obr. 1.11.

Silu pôsobiacu na časticu môžeme vyjadriť vzťahom:

$$\vec{F} = q\vec{E} = qE\vec{j} \tag{1.14}$$



Obr. 1.11

a pre počiatočnú rýchlosť platí:

$$\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}.$$

Druhý Newtonov pohybový zákon ($\vec{F} = m\vec{a}$) v kombinácii so vzťahom (1.14) poskytuje rovnice:

$$F_x = ma_x = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0,$$

$$F_y = ma_y = m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = qE.$$

Integráciou týchto rovníc určíme súradnice rýchlosti a súradnice polohy častice v ľubovoľnom časovom okamihu t. Dostaneme

$$v_x = v_0,$$

$$v_y = \frac{qE}{m}t,$$

$$x = v_0 t, \tag{1.15}$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2. \tag{1.16}$$

Elimináciou času v rovniciach (1.15) a (1.16) určíme rovnicu dráhy častice:

$$y = \frac{1}{2}\frac{qE}{mv_0^2}x^2 = konst.x^2.$$

Častica sa teda pohybuje po parabolickej dráhe.

1.6 Energia sústavy nábojov, nabitého vodiča a elektrostatického poľa

Na vytvorenie sústavy nábojov musíme vykonať prácu spojenú s prekonaním odpudivých či príťažlivých síl pôsobiacich medzi nimi. Pod energiou sústavy nábojov budeme potom rozumieť celkové množstvo práce, ktorú musí vykonať vonkajšia sila na jej vytvorenie. Predstavme si napríklad, že vytvárame sústavu bodových nábojov. K prvému náboju by sme priniesli druhý náboj, pričom by sme konali prácu proti silám poľa vytvoreného prvým nábojom. Pri „prinášaní“ tretieho náboja by sme konali prácu proti silám poľa vytvoreného prvou dvojicou nábojov a analogicky by to bolo pri postupnom „prinášaní“ ďalších nábojov.
Ak využijeme definíciu potenciálnej energie, ktorú vzťahujeme na nekonečno, môžeme pre prácu potrebnú na vytvorenie sústavy dvoch nábojov Q_1, Q_2 písať

$$W' = \int_{\propto}^{\vec{r}} \vec{F}' \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{\propto}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_p\left(r\right) - E_p\left(\propto\right) = E_p\left(r\right) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}}, \quad (1.17)$$

kde $\vec{F}'$ je vonkajšia sila, $\vec{F}$ je sila poľa, $\vec{r}_{12}$ je polohový vektor náboja Q_2 vzhľadom na polohu náboja Q_1.
Pre elektrický potenciál φ_1 prvého náboja v poli druhého a pre potenciál φ_2 druhého náboja v poli prvého náboja môžeme na základe vzťahu (1.12) písať

$$\varphi_1 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}} \quad \text{a} \quad \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}}. \quad (1.18)$$

Z (1.17), (1.18) môžeme vyjadriť energiu E_p uvažovanej dvojice nábojov nasledovne

$$E_p = W' = Q_1\varphi_1 = Q_2\varphi_2. \quad (1.19)$$

Vzťah (1.19) môžeme vyjadriť aj nasledovným spôsobom:

$$E_p = \frac{1}{2}\left(Q_1\varphi_1 + Q_2\varphi_2\right).$$

Postupom naznačeným v úvode tejto kapitoly možno odvodiť analogický vzťah platný pre ľubovolný počet nábojov:

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i, \quad (1.20)$$

kde sčítavame cez všetky náboje, Q_i označuje i-ty náboj a φ_i je elektrický potenciál poľa v mieste i-teho náboja, ktorý je vytvorený ostatnými nábojmi.

Zo vzťahu (1.20) možno veľmi jednoducho vyjadriť energiu nabitého vodiča. Umožňuje to skutočnosť, že nabitý vodič predstavuje ekvipotenciálny útvar. Môžeme sa o tom presvedčiť nasledovnou úvahou. Vieme, že vo vnútri vodiča je $E = 0$. Ak spojíme dva ľubovoľné body ľubovolnou krivkou a urobíme nižšie naznačenú integráciu, zrejme platí:

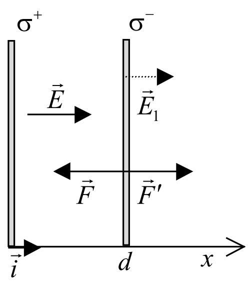
$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$$

a teda $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ pre ľubovoľnú dvojicu bodov vodiča.
Pre **energiu nabitého vodiča** teraz zo vzťahu (1.20) dostaneme

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi = \frac{1}{2} \varphi \sum_i Q_i = \frac{1}{2} \varphi Q,$$

kde $Q = \sum_i Q_i$ je celkový náboj na vodiči.

Teraz prejdeme k vyjadreniu energie elektrostatického poľa. Uvažujme dve nekonečné rovnobežné roviny nabité s rovnakou plošnou hustotou náboja opačného znamienka (pozri Obr. 1.12). Ak sa tieto roviny dotýkajú, energia je nulová ($Q = 0$). Ak sú vo vzájomnej vzdialenosti d, veľkosť intenzity homogénneho elektrostatického poľa vytvoreného v objeme medzi nimi je



Obr. 1.12

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Vieme tiež, že pole vytvorené jednou rovinou v mieste, kde je uložená druhá, je

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Potenciálna energia odpovedajúca ploche S roviny môže byť vyjadrená

$$\begin{aligned} E_p &= -\int\limits_0^d \vec{F} \cdot \vec{i} dx = \int\limits_0^d F dx = S\sigma \int\limits_0^d E_1 dx = \\ &= S\sigma \int\limits_0^d \tfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \tfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} Sd = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd. \end{aligned} \tag{1.21}$$

To je **energia elektrostatického poľa**, ktoré je vytvorené v objeme $V = Sd$. Výraz

$$w_{el} = \frac{E_p}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

potom vyjadruje **hustotu energie**, teda energiu elektrostatického poľa v objemovej jednotke.

1.7 Kapacita vodiča, elektrický kondenzátor

V predošlej časti sme ukázali, že nabitý vodič predstavuje ekvipotenciálny útvar. Táto skutočnosť nám umožňuje definovať kapacitu vodiča nasledovným spôsobom. **Kapacita vodiča** C je definovaná ako podiel náboja Q na vodiči a absolútneho potenciálu φ vodiča ($\varphi = 0$ pre $r \to \infty$):

$$C = \frac{Q}{\varphi}.$$

Jednotkou kapacity v sústave SI, ktorá vyplýva z definície, je coulomb/volt. Táto jednotka sa nazýva farad (F):

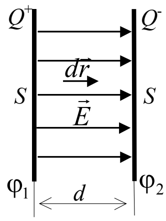
$$1\mathrm{F} = \frac{1\mathrm{C}}{1\mathrm{V}}.$$

Sústava pozostávajúca z dvoch vodičov nabitých rovnakým nábojom opačného znamienka sa nazýva kondenzátor. **Kapacita kondenzátora** je definovaná:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

kde φ_1 a φ_2 sú elektrické potenciály na jednotlivých vodičoch a Q je náboj vodiča, ktorý má potenciál φ_1.

Kapacita doskového kondenzátora
Na ilustráciu nájdeme vyjadrenie kapacity pre doskový kondenzátor, ktorý tvoria dve rovnobežné vodivé dosky vo vzdialenosti d, ktorá je malá v porovnaní s rozmermi dosák. Nech na dosky, ktorých plošný obsah je S, sú privedené opačné náboje $\pm Q$. Rozdiel potenciálov dosák môže byť vyjadrený



Obr. 1.13

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathrm{d}\varphi = -\int_0^d \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_0^d E\mathrm{d}r = -Ed. \tag{1.22}$$

a s využitím vzťahu $E = \frac{\sigma^+}{\varepsilon_0}$ dostávame:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{\sigma^+}{\varepsilon_0} d = \frac{Q^+}{S\varepsilon_0} d.$$

Potom pre kapacitu dostávame z definície

$$C = \frac{Q^+}{\varphi_1 - \varphi_2} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}. \tag{1.23}$$

Zo vzťahu (1.22) pre elektrické napätie medzi doskami rovinného kondenzátora platí:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = Ed \tag{1.24}$$

a zo vzťahov (1.21), (1.23) a (1.24) určíme energiu nabitého kondenzátora:

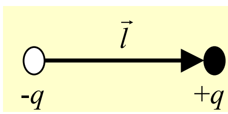
$$E_p = \frac{1}{2} C U^2. \tag{1.25}$$

Aj keď vzťah (1.25) sme získali v špeciálnom prípade doskového kondenzátora, jeho platnosť je všeobecná a platí pre ľubovoľný elektrický kondenzátor. Môžeme sa o tom presvedčiť, ak použijeme vzťah (1.20), vyjadrujúci energiu sústavy nábojov, a definíciu kapacity elektrického kondenzátora. Zo vzťahu (1.20) dostaneme:

$$\begin{aligned} E_p &= \tfrac{1}{2}\left(Q^+\varphi_1 + Q^-\varphi_2\right) = \tfrac{1}{2}\left(Q^+\varphi_1 - Q^+\varphi_2\right) = \\ &= \tfrac{1}{2}Q^+\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = \tfrac{1}{2}Q^+U = \tfrac{1}{2}CU^2. \end{aligned}$$

1.8 Dielektriká

Niektoré aspekty elektrického poľa vo vodičoch boli diskutované v predchádzajúcich kapitolách. V tejto kapitole sa budeme venovať izolantom, nazývaným tiež dielektriká. Napriek tomu, že atóm, molekula obsahuje rovnaké množstvo kladného a záporného náboja, rozloženie náboja vo vnútri takej častice môže viesť k nenulovému elektrickému poľu v jej okolí. Skôr ako sa budeme podrobnejšie zaoberať touto problematikou, uveďme niekoľko krátkych poznámok k pojmu elektrický dipól a definujme veličinu elektrický dipólový moment. Pod pojmom elektrický dipól rozumieme sústavu dvoch rovnako veľkých elektrických nábojov s opačnými znamienkami $-q$ a $+q$, vzdialených od seba o l (pozri Obr. 1.14). Elektrický dipólový moment definujeme vzťahom

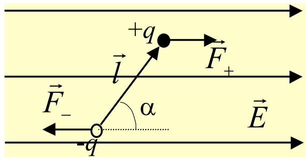


Obr. 1.14

$$\vec{p} = q\vec{l},$$

kde q je kladný náboj a $\vec{l}$ je polohový vektor kladného náboja vzhľadom na záporný.
Preskúmame chovanie sa dipólu v homogénnom elektrickom poli. Je zrejmé, že sily pôsobiace na jednotlivé náboje tvoria dvojicu síl a, v súlade s označením na obrázku, pre jej moment platí:

$$\vec{T} = \vec{l} \times \vec{F}_+ = \vec{l} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}, \qquad T = \left|\vec{T}\right| = pE\sin\alpha.$$



Obr. 1.15

Moment síl bude nulový pre $\alpha = 0$ a teda dipól sa snaží natočiť do smeru poľa. Z hľadiska atomárneho pohľadu na chovanie sa dielektrických materiálov sú dôležité dva nasledujúce aspekty:

1. Molekuly dielektrika majú nesymetrické rozloženie atómov pričom rozdelenie kladného a záporného náboja je také, že ich stredovaním nedospejeme k tomu istému bodu. Ako príklad možno uviesť molekulu H_20. Prebytok kladného náboja je na vodíkových atómoch a naopak prebytok záporného náboja je na atóme kyslíka. Takáto molekula má potom nenulový elektrický moment $\vec{p}$ a v takomto prípade hovoríme, že sa jedná o polárnu molekulu. Keď takúto látku vložíme do elektrického poľa, na dipóly molekúl pôsobia sily, snažiace sa ich stočiť do smeru poľa. Nakoľko molekuly vykonávajú tepelný pohyb toto stočenie nebude úplné, avšak bude rásť so zväčšovaním poľa či poklesom teploty. Výsledkom stočenia dipólov je čiastočná polarizácia prostredia.

2. Molekuly niektorých plynov skladajúcich sa z dvoch atómov (napr. 0_2) nemajú dipólový moment, nakoľko stredovaním kladného a záporného náboja molekuly dospejeme k rovnakému bodu. Takéto molekuly nazývame nepolárnymi. Pozrime sa čo sa stane, ak takýto plyn vložíme do elektrického poľa. Pre jednoduchosť uvažujme jednoatómovú molekulu, napríklad hélium. Ak je takýto atóm v elektrickom poli, elektróny resp. jadro sú ťahané opačnými smermi. Aj napriek tomu, že väzba jadro elektrónový obal je veľmi silná dochádza k vzájomnému posunu kladného a záporného náboja atómu, čoho výsledkom je indukovaný elektrický dipólový moment.

Z predchádzajúceho možno vidieť, že **po vložení do elektrického poľa sa dielektrikum stáva polarizovaným**. Je pritom prirodzené očakávať, že k indukovaniu dipólového momentu dochádza aj v prípade nepolárnych molekúl, avšak spravidla dominantný je príspevok od polárnych molekúl.

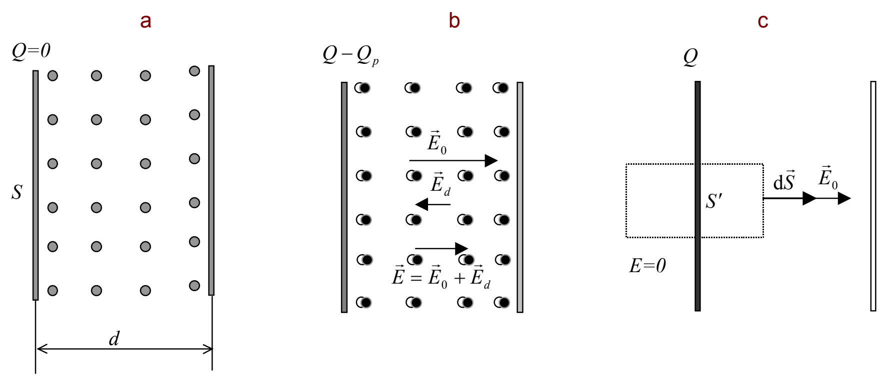
Majme dva identické rovinné kondenzátory. Priestor medzi doskami prvého nech je vyplnený dielektrickým materiálom. Medzi doskami druhého nech je vákuum. Experimentálne by sme zistili, že kapacita kondenzátora s dielektrikom je ε_r krát väčšia v porovnaní so situáciou, keď je medzi doskami vákuum. Konštanta ε_r závisí od druhu dielektrika a nazýva sa relatívna permitivita. Relatívna permitivita pre vákuum je rovná 1 a pre všetky ostatné dielektriká je väčšia ako 1.
Označme kapacitu kondenzátora s dielektrikom symbolom C_d a vákuového kondenzátora symbolom C_o. Analogicky označíme aj rozdiely potenciálov medzi doskami ako $\Delta\varphi_d$ resp. $\Delta\varphi_0$. Na dosky obidvoch kondenzátorov uložíme náboje rovnakej veľkosti Q.
Zrejme platí

$$Q = C_0\Delta\varphi_0 = C_d\Delta\varphi_d$$

a

$$\varepsilon_r = \frac{C_d}{C_0} = \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta\varphi_d} \quad \text{alebo} \quad \Delta\varphi_d = \frac{\Delta\varphi_0}{\varepsilon_r}.$$

Vidíme, že $\Delta\varphi_d < \Delta\varphi_0$ nakoľko $\varepsilon_r > 1$.



Obr. 1.16

Schematicky sú diskutované situácie znázornené na Obr. 1.16. Bez poľa vykazuje dielektrikum náhodné rozdelenie kladného a záporného náboja. Privedením náboja na dosky kondenzátora sa vytvorí medzi doskami elektrické pole E_o, spolarizuje dielektrikum a výsledkom je vytvorenie rovnako veľkých nábojov

opačného znamienka na povrchu dielektrika pri doskách kondenzátora, pričom náboj vnútorného objemu dielektrika je nulový.
Povrchové náboje vytvárajú pole $\vec{E}_d$ orientované opačne k poľu $\vec{E}_o$. Takže, ak vložíme dielektrický materiál do elektrického poľa, výsledkom je kladný náboj na jednom povrchu a záporný náboj na druhom povrchu. Tieto náboje sú čo do veľkosti rovnaké. Pri tomto procese dochádza k posunu nábojov o vzdialenosti menšie, ako je polomer atómov a teda nedochádza k prenosu náboja v makroskopickom meradle.
Výsledné elektrické pole $\vec{E}$ v dielektriku dostaneme, ako vektorový súčet polí $\vec{E}_o$ a $\vec{E}_d$ t.j.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_d.$$

Pole $\vec{E}$ je orientované rovnako, ako vonkajšie pole $\vec{E}_o$ ale je menšie.
Použime teraz Gaussov zákon na obidva kondenzátory s dielektrikom a bez dielektrika pričom uzavretú integračnú plochu volíme spôsobom ako je to naznačené na Obr. 1.16c., pričom zanedbáme okrajové narušenie homogenity poľa pri okrajoch dosiek. Pre tok intenzity poľa cez uvedenú uzavretú integračnú plochu v prípade kondenzátora s vákuom dostaneme

$$\oint \vec{E}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E_0 S' = \frac{Q'}{\varepsilon_0}.$$

Podobne pre kondenzátor s dielektrikom

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E S' = \frac{Q' - Q'_p}{\varepsilon_0},$$

kde Q'_p je časť z celkového indukovaného povrchového náboja Q_p nachádzajúca sa v objeme ohraničenom integračnou plochou a Q' časť voľného náboja Q privedeného na dosky kondenzátora v uvedenom objeme. Tieto náboje majú opačné znamienka teda v prípade dielektrika je celkový náboj v objeme uzavretom integračnou plochou rovný $Q' - Q'_p$.
Pre intenzity polí platí:

$$E_0 = \frac{Q'}{S'\varepsilon_0} \quad \text{a} \quad E = \frac{Q' - Q'_p}{S'\varepsilon_0}.$$

Vzťah $\Delta\varphi = Ed$ platí pre doskový kondenzátor nezávisle od toho či obsahuje dielektrikum alebo nie a teda môžeme písať:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta\varphi_d} = \frac{E_0 d}{E d} = \frac{E_0}{E} = \frac{Q'}{Q' - Q'_p}$$

a

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{Q'}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S'}$$

alebo

$$Q'_p = Q'\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right). \tag{1.26}$$

Posledný vzťah vyjadruje skutočnosť, že vždy je $Q'_p < Q'$ a $Q'_p = 0$ ak $\varepsilon_r = 1$. Vychádzajúc z

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q' - Q'_p}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[Q' - Q'\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\right]$$

a po krátkych úpravách dostaneme:

$$\oint \varepsilon_r \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q'}{\varepsilon_0}.$$

Posledný vzťah, aj keď bol odvodený pre špeciálny prípad doskového kondenzátora, platí všeobecne. Je veľmi podobný matematickej formulácii Gaussovho zákona pričom:

- Integrál vyjadrujúci tok poľa teraz obsahuje relatívnu permitivitu ε_r.
- Náboj Q' na pravej strane, nachádzajúci sa v objeme ohraničenom integračnou plochou, je len voľný náboj.

Po úprave vzťahu (1.26) dostaneme:

$$Q' = \frac{Q'}{\varepsilon_r} + Q'_p \quad \text{alebo} \quad \frac{Q'}{S'} = \varepsilon_0 \frac{Q'}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S'} + \frac{Q'_p}{S'} = \varepsilon_0 E + \frac{Q'_p}{S'}. \tag{1.27}$$

Posledný výraz na pravej strane je indukovaný povrchový náboj pripadajúci na jednotku plochy povrchu. Nazveme ho elektrickou polarizáciou P, a platí

$$P = \frac{Q'_p}{S'}. \tag{1.28}$$

Ak vynásobíme čitateľa aj menovateľa vzdialenosťou medzi doskami (tiež hrúbkou dielektrika) d, dostaneme výraz:

$$P = \frac{Q'_p d}{S' d}.$$

V súlade s definíciou elektrického dipólového momentu, čitateľ $(Q'_p d)$ predstavuje indukovaný elektrický dipólový moment dielektrika. Keďže menovateľ $(S'd)$ je objem dielektrika, polarizácia predstavuje elektrický dipólový moment jednotkového objemu dielektrika. Nakoľko dipólový moment je vektorom bude aj polarizácia vektorovou veličinou. Vyššie uvedený vzťah predstavuje veľkosť vektora polarizácie, pričom v súlade s definíciou dipólového momentu, bude vektor polarizácie smerovať od záporného ku kladnému indukovanému náboju.
Po dosadení polarizácie (vzťah (1.28)) do vzťahu (1.27), dostaneme:

$$\frac{Q'}{S'} = \varepsilon_0 E + P.$$

Výraz na ľavej strane predstavuje ďalšiu veličinu používanú v elektrostatike a nazýva sa indukcia elektrického poľa D, t.j.

$$D = \varepsilon_0 E + P.$$

P a D majú rovnaké jednotky [Cm^{-2}]. Nakoľko E a P sú vektorové veličiny, aj D bude vektorom a teda

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Pre tri vektory v poslednej rovnici platí:

- Vektor $\vec{D}$ je spojený len s voľnými nábojmi. Siločiary spojené s vektorom $\vec{D}$ začínajú a končia len na voľných nábojoch.
- Vektor $\vec{P}$ je spojený len s viazanými nábojmi. Siločiary spojené s vektorom $\vec{P}$ začínajú a končia len na viazaných nábojoch.
- Vektor $\vec{E}$ je spojený so všetkými nábojmi. Siločiary spojené s vektorom $\vec{E}$ začínajú a končia na oboch druhoch nábojov.

Nakoľko

$$D = \frac{Q'}{S'} = \frac{Q'_p}{S'} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)} = P \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1},$$

vektory $\vec{D}$ a $\vec{P}$ možno vyjadriť pomocou $\vec{E}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{D} \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{D} - \frac{\vec{D}}{\varepsilon_r}$$

a

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Pre vektor $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon_r - 1)\, \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Je zrejmé, že pre vákuum ($\varepsilon_r = 1$) je $\vec{P}$ rovné nule.
Zavedenie vektora $\vec{D}$ a rovnica $\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q'$ poskytuje možnosť vyjadriť Gaussov zákon v tvare:

$$\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q, \tag{1.29}$$

kde Q sú len voľné náboje.