6 Elektromagnetické vlnenie

6.1 Opis elektromagnetického vlnenia

Na teoretický popis elektromagnetického vlnenia možno použiť Maxwellove rovnice. Pre jednoduchosť budeme uvažovať vákuum, kde nie sú žiadne náboje, prúdy, ani permanentné magnety. Za týchto podmienok majú Maxwellove rovnice tvar:

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{6.1}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{6.2}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0, \tag{6.3}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0. \tag{6.4}$$

Derivujme rovnicu (6.1) podľa času:

$$\mathrm{rot}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

a za $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ dosadíme z rovnice (6.2):

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{E}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Ak použijeme nasledovnú identitu známu z vektorovej analýzy

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{E}\right) = \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E}$$

a rovnicu (6.3), dostaneme

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \tag{6.5}$$

kde $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ je tzv. Laplaceov operátor.
Podobným postupom možno dospieť k rovnakej rovnici pre vektor $\vec{B}$:

$$\Delta\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \tag{6.6}$$

Rovnica typu $\Delta\vec{u} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}$ je známa ako vlnová rovnica popisujúca netlmenú vlnu šíriacu sa rýchlosťou v. Vidíme teda, že rovnice (6.5) a (6.6) sú vlnovými rovnicami a teda popisujú v priestore sa šíriaci vlnový rozruch vo forme zmien vektorov $\vec{E}$ a $\vec{B}$. Takúto vlnu nazývame elektromagnetickou vlnou. Ak porovnáme vyššie uvedenú obecnú vlnovú rovnicu s rovnicami (6.5) a (6.6), dostávame pre rýchlosť elektromagnetickej vlny vo vákuu vzťah:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Ak dosadíme hodnoty permitivity a permeability pre vákuum, dostaneme výsledok

$$v = 3\text{x}10^8\text{ms}^{-1}.$$

Táto hodnota je zhodná s nameranou rýchlosťou svetla vo vákuu. Rýchlosť šírenia sa elektromagnetických vĺn vo vákuu je konštanta, ktorá nezávisí od vlnovej dĺžky a frekvencie.
Aby sme sa dozvedeli viac o vlastnostiach elektromagnetickej vlny, uvažujme prípad, keď sa takáto vlna šíri napríklad pozdĺž osi x. Nech vektor intenzity elektrického poľa vyhovuje rovnici rovinnej vlny šíriacej sa v kladnom smere osi x, teda:

$$\vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Použijúc substitúciu $p = t - \frac{x}{v}$ môžeme písať:

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}p}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}p}\left(-\frac{1}{v}\right),$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}p}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}p},$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\left(-\frac{1}{v}\right).$$

Z týchto rovníc spolu s Maxwellovou rovnicou $\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ postupne dostaneme:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{i}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} = \vec{i}\times\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}p}\frac{\partial p}{\partial x} = \vec{i}\times\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}p}\left(-\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v}\vec{i}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{i}\times\vec{E}}{v}\right) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Keďže rovnica

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{i}\times\vec{E}}{v}\right) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

platí v ľubovoľnom časovom okamihu, môžeme písať:

$$\vec{B} = \frac{\vec{i}\times\vec{E}}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}\left(\vec{i}\times\vec{E}\right). \tag{6.7}$$

Z rovnice (6.7) môžeme urobiť nasledovné závery:

1. vektor $\vec{B}$ je vždy kolmý na vektor $\vec{E}$,
2. vektor $\vec{B}$ je vždy kolmý na vektor $\vec{i}$, čo znamená že vektor $\vec{B}$ sa môže meniť iba v rovine, ktorá je kolmá na smer šírenia sa elektromagnetickej vlny,
3. časová závislosť $\vec{B}$ je rovnaká ako časová závislosť $\vec{E}$, takže vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$ kmitajú vo fáze,
4. súvis medzi veľkosťami vektorov $\vec{B}$ a $\vec{E}$ je daný rovnicou $\left|\vec{B}\right| = \sqrt{\varepsilon\mu}\left|\vec{E}\right|$.

Z Maxwellovej rovnice div$\vec{E} = 0$ dostaneme:

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}\vec{E} = \tfrac{\partial E_x}{\partial x} = \tfrac{\partial\left(\vec{i}\cdot\vec{E}\right)}{\partial x} = \vec{i}\cdot\tfrac{\partial\left(\vec{E}\right)}{\partial x} = \vec{i}\cdot\tfrac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}p}\tfrac{\partial p}{\partial x} = \vec{i}\cdot\tfrac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}p}\left(-\tfrac{1}{v}\right) = \\ &= -\tfrac{\vec{i}}{v}\tfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \tfrac{\partial}{\partial t}\left(-\tfrac{\vec{i}\cdot\vec{E}}{v}\right) = 0\end{aligned}$$

Rovnica

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{i}\cdot\vec{E}}{v}\right) = 0$$

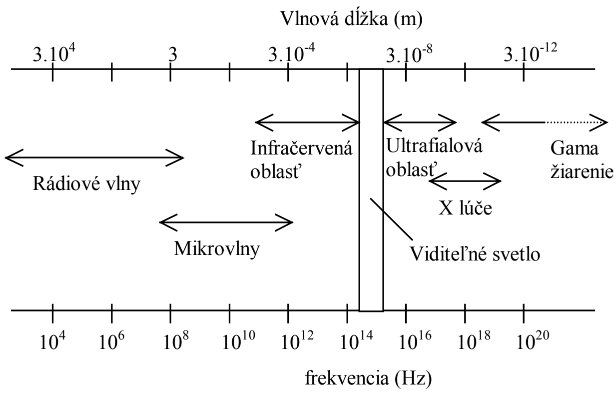
platí pre každý časový okamih, preto:

$$\vec{i}\cdot\vec{E} = 0.$$

Z tejto rovnice vyplýva, že vektor $\vec{E}$ je vždy kolmý na vektor $\vec{i}$, čo znamená, že aj vektor $\vec{E}$ sa mení v rovine kolmej na smer šírenia sa elektromagnetického vlnenia. Z toho vidíme, že rovinná elektromagnetická vlna je priečnym vlnením.

6.2 Elektromagnetické spektrum

Oblasť frekvencií elektromagnetického vlnenia, alebo elektromagnetického žiarenia, je veľmi široká, obvykle sa delí ako je to na obrázku 6.1 a nazýva sa elektromagnetické spektrum. Vlnová dĺžka viditeľného svetla leží medzi 4.10^{-7} m a $7,5.10^{-7}$ m; frekvencie viditeľného svetla sa menia od 4.10^{14} Hz do $7,5.10^{14}$ Hz. Ale viditeľné svetlo je iba veľmi malou časťou spektra elektromagnetického žiarenia (Obr. 6.1). Elektromagnetické vlny s oveľa menšou frekvenciou sa nazývajú rádiovými vlnami, pretože takýmito frekvenciami sa dnes prenáša rádiový a televízny signál. Takéto vlny sa tvoria pomocou elektronických zariadení.
Vlny s vyššou frekvenciou je veľmi obtiažne produkovať elektronicky. Sú produkované v prírodných procesoch, ako sú emisie z atómov a molekúl. Elektromagnetické žiarenie vzniká aj vtedy, ak sa urýchľujú elektróny alebo iné nabité častice. X lúče vznikajú pri prudkom zabrzdení rýchlych elektrónov pri ich dopade na kovový terčík.



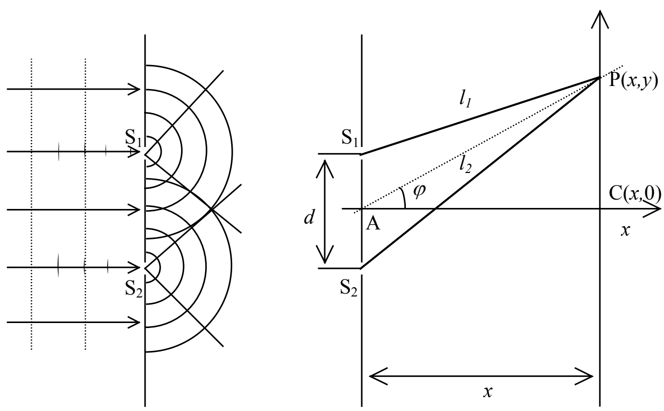
Obr. 6.1

Infračervené žiarenie, ktorého frekvencia je o niečo menšia ako je frekvencia viditeľného žiarenia, je zodpovedné za tepelné žiarenie Slnka. Slnko vyžaruje nielen viditeľné žiarenie, ale aj značné množstvo infračerveného a ultrafialového žiarenia.

6.3 Vlnové vlastnosti elektromagnetického žiarenia

6.3.1 Youngov interferenčný pokus

V oblasti, kde sa prekrývajú vlnenia, dochádza k ich skladaniu - interferencii. Výsledné kmitanie v každom mieste sa vyznačuje okamžitou výchylkou rovnou súčtu okamžitých výchyliek jednotlivých vĺn, amplitúda výsledného kmitania bude závisieť najmä od rozdielu fáz skladaných vĺn. Významný je prípad, kedy zdroje vlnení kmitajú s rovnakou frekvenciou, majú rovnaký smer kmitania a konštantný fázový rozdiel - sú koherentné. V tomto prípade amplitúda výsledného kmitania v danom bode závisí iba od jeho vzdialenosti od zdrojov vlnení. Zásadný význam pre dôkaz vlnovej podstaty svetla mal Youngov interferenčný pokus. Ako dva koherentné zdroje vlnenia použil Young dve blízke štrbiny (ich šírka je oveľa menšia ako ich vzájomná vzdialenosť), ktoré sú osvetlené jedným svetelným zdrojom a samy sa podľa Huygensovho princípu stávajú novými zdrojmi vlnení, ktoré kmitajú s rovnakou fázou a amplitúdou (Obr. 6.2). Tieto vlnenia sa prekrývajú a spolu interferujú. Vyšetrime interferenciu v bode P na tienidle vzdialenom o x od štrbín, pričom platí $x >> d$, kde d je vzdialenosť štrbín. Za uvedeného predpokladu možno pokladať svetelné lúče prichádzajúce do bodu P za rovnobežné, pričom uhol, ktorý zvierajú s osou x nech je φ.



Obr. 6.2

Intenzita osvetlenia je úmerná kvadrátu výslednej amplitúdy. Pre výslednú amplitúdu pri skladaní dvoch rovnosmerných kmitavých pohybov s rovnakou amplitúdou A platí:

$$A_v = \sqrt{2A^2 + 2A^2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

takže je zrejmé, že výsledná amplitúda závisí iba od rozdielu fáz $\alpha_2 - \alpha_1$. Ak $cos(\alpha_2 - \alpha_1) = -1$, výsledná amplitúda je rovná nule a v mieste, kde sa skladajú dva takéto lúče, bude tma; najsvetlejšie miesta budú tam, kde sa skladajú dva lúče, pre ktoré $cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 1$.
Dva skladajúce sa lúče možno popísať nasledovne:

$$u_1 = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi l_1}{\lambda}\right) \quad \text{a} \quad u_2 = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi l_2}{\lambda}\right)$$

a rozdiel fáz je

$$|\alpha_2 - \alpha_1| = \left|-\frac{2\pi l_2}{\lambda} + \frac{2\pi l_1}{\lambda}\right| = \frac{2\pi}{\lambda}|l_1 - l_2| = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta,$$

kde Δ je dráhový rozdiel.
Maximá amplitúdy a teda najsvetlejšie miesta na tienidle budú tam, kde platí:

$$\frac{2\pi}{\lambda}\Delta = 2k\pi \;\Rightarrow\; \Delta = k\lambda, \qquad k = 0, 1, 2, 3, ... \tag{6.8}$$

Pre veľkosť dráhového rozdielu Δ dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta = l_2 - l_1 &= \sqrt{x^2 + \left(y + \tfrac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(y - \tfrac{d}{2}\right)^2} = \\ &= x\left[\sqrt{1 + \left(\tfrac{y+\frac{d}{2}}{x}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\tfrac{y-\frac{d}{2}}{x}\right)^2}\right]. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Pri experimente je spravidla splnená podmienka, že tak ako vzdialenosť štrbín d ako aj poloha bodu P na tienidle y sú omnoho menšie ako vzdialenosť medzi štrbinami a tienidlom x. Využijúc binomický rozvoj pre $a << 1$ približne platí

$$\sqrt{(1 \pm a)} \cong 1 \pm \frac{1}{2}a.$$

Zrejme platí $a = \left(\frac{y\pm\frac{d}{2}}{x}\right)^2 << 1$ a teda v uvedenej aproximácii dostávame zo vzťahu (6.9) pre dráhový rozdiel lúčov:

$$\Delta \cong \frac{yd}{x}. \tag{6.10}$$

Po dosadení do (6.8), pre polohy maxím dostávame:

$$y = \frac{x}{d} k\lambda.$$

Z (6.10), pravouhlého trojuholníka ACP na obrázku 6.2 a pre $y << x$ dostaneme:

$$\Delta \cong \frac{yd}{x} = tg\varphi d \cong d \sin\varphi$$

a teda podmienku maxima môžeme napísať aj nasledovným spôsobom:

$$d \sin\varphi = k\lambda.$$

V bodoch, kde sa skladajú dva také lúče, ktorých dráhový rozdiel je celistvý násobok vlnovej dĺžky dopadajúceho svetla, sa objaví maximálne osvetlenie, kým v miestach, kde $d \sin\varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ bude amplitúda, a teda aj intenzita nulová. To znamená, že tam budú tmavé miesta. Na tienidle sa objavia striedavo svetlé a tmavé pásy. Takto vypočítané výsledky boli v úplnej zhode s pozorovaním, teda svetlo sa tu prejavuje a dá sa úspešne popísať ako vlnenie.

6.3.2 Interferencia svetla na tenkej vrstve

Na úvod tejto kapitoly definujme index lomu n pre dané prostredie vzťahom

$$n = \frac{c}{v},$$

kde c je rýchlosť svetla vo vákuu a v je rýchlosť svetla v danom prostredí.
Ako už vieme, podmienku interferenčného zosilnenia pre vlny, a teda aj pre svetlo, postupujúce v tom istom prostredí môžeme vyjadriť vzťahom

$$\Delta = l_2 - l_1 = k\lambda, \tag{6.11}$$

kde Δ označuje rozdiel dĺžok geometrických dráh l_1 a l_2 interferujúcich lúčov, λ je vlnová dĺžka svetla a k je celé číslo. Vzťah (6.11) môžeme vyjadriť aj nasledovným spôsobom:

$$\frac{l_2}{\lambda} - \frac{l_1}{\lambda} = k$$

a vyjadruje skutočnosť, že k interferenčnému zosilneniu dochádza, ak rozdiel počtu vlnových dĺžok pripadajúcich na geometrické dráhy interferujúcich lúčov je rovný celému číslu. Takto formulovaná interferenčná podmienka je platná aj v prípade, ak sa interferujúce lúče pred interferenciou pohybujú rôznymi prostrediami, t.j. interferenčnú podmienku môžeme vyjadriť vzťahom:

$$\frac{l_2}{\lambda_2} - \frac{l_1}{\lambda_1} = k. \tag{6.12}$$

Skutočnosť, že sa lúče šíria rôznymi prostrediami sme vyjadrili rozdielnosťou vlnových dĺžok.
Pre ďalšie úvahy je dôležité si uvedomiť, že daný lúč prechádzajúci z jedného prostredia do druhého mení svoju rýchlosť a vlnovú dĺžku, avšak nemení sa jeho frekvencia. Môžeme teda písať

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2} = \frac{c}{\lambda}$$

a tiež

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{c}{v_1}\frac{1}{\lambda} = n_1\frac{1}{\lambda} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\lambda_2} = \frac{c}{v_2}\frac{1}{\lambda} = n_2\frac{1}{\lambda}, \tag{6.13}$$

kde n_1, n_2 sú indexy lomu prostredí 1 a 2 a λ je vlnová dĺžka svetla vo vákuu. Po dosadení vzťahov (6.13) do vzťahu (6.12) a jednoduchej úprave dostaneme

$$n_2 l_2 - n_1 l_1 = k\lambda. \tag{6.14}$$

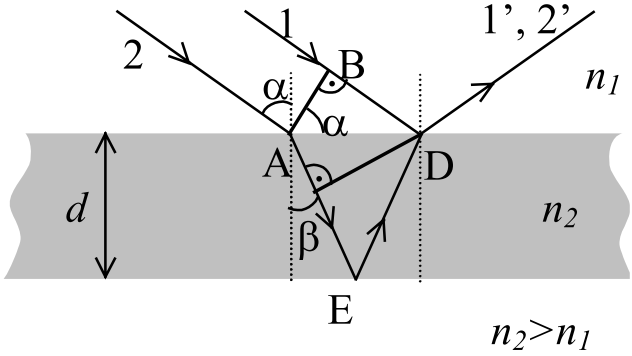
Veličina nl, vystupujúca na ľavej strane tejto rovnice, sa nazýva optická dráha. Uvažujme teraz rovnobežný zväzok lúčov dopadajúci na tenkú vrstvu hrúbky d. Index lomu tenkej vrstvy nech je n_2 a index lomu okolitého prostredia nech je n_1 (Obr. 6.3). Časť dopadajúceho svetla sa odráža na povrchu vrstvy a časť preniká do prostredia vrstvy. Podobný proces prebieha aj na dolnom rozhraní. Na obrázku sú znázornené dva lúče, lúč 1 a lúč 2. Tieto dva lúče sa stretajú v bode D. Ak uvažujeme rovinnú vlnu, vlnoplocha, v momente dopadu lúča 2 na povrch vrstvy, je znázornená úsečkou AB. Od tohto okamihu do okamihu stretnutia sa oboch lúčov v bode D prejdú tieto lúče rozdielne dráhy:

$$l_2 = \mathrm{AE} + \mathrm{ED} = 2\mathrm{AE}, \qquad l_1 = \mathrm{BD}$$

Z obrázka 6.3 a po postupných úpravách dostávame:

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}} = \frac{l_1}{\mathrm{AD}}, \quad \sin\beta = \frac{\mathrm{AD}}{2\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{AD}}{l_2}, \quad \cos\beta = \frac{d}{\mathrm{AE}} = \frac{2d}{l_2},$$

$$l_1 = \mathrm{AD}\sin\alpha, \quad \mathrm{AD} = l_2\sin\beta, \quad l_2 = \frac{2d}{\cos\beta},$$



Obr. 6.3

$$l_1 = l_2 \sin\beta \sin\alpha = 2d\frac{\sin\beta\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Použijúc zákon lomu a definíciu indexu lomu dostaneme:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

kde v_1 je rýchlosť svetla v prvom prostredí a v_2 je rýchlosť svetla v druhom prostredí. Potom

$$n_1 = n_2\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Teraz vyjadríme rozdiel optických dráh (ľavá strana rovnice (6.14)) lúčov 1,2:

$$n_2 l_2 - n_1 l_1 = n_2\tfrac{2d}{\cos\beta} - n_1 2d\tfrac{\sin\beta\sin\alpha}{\cos\beta} = n_2\tfrac{2d}{\cos\beta} - n_2\tfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}2d\tfrac{\sin\beta\sin\alpha}{\cos\beta} =$$
$$= 2n_2 d\tfrac{1}{\cos\beta}\left(1-\sin^2\beta\right) = 2n_2 d\cos\beta.$$

Nakoniec ešte potrebujeme vziať do úvahy skutočnosť, že na povrchu vrstvy sa vlna odráža na materiále s väčším indexom lomu ako u prostredia v ktorom sa šíri. Pri odraze svetla na takomto rozhraní dochádza k fázovému posunu vlny o 180^0. Ak je index lomu prostredia, na hranici ktorého sa svetlo odráža menší ako index lomu prostredia v ktorom sa šíri, k fázovému posunu nedochádza. Túto skutočnosť môžeme zahrnúť do interferenčnej podmienky tak, že k rozdielu optických dráh vo vzťahu (6.14) pripočítame alebo odpočítame jednu polvlnu. Pre podmienku interferenčného zosilnenia odrazeného svetla tenkou vrstvou potom dostávame:

$$2n_2 d\cos\beta = k\lambda + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\,\frac{\lambda}{2}.$$

Rovnakým postupom možno dospieť tiež k podmienke interferenčného zoslabenia pre odrazené svetlo tenkou vrstvou. Platí:

$$2n_2 d\cos\beta = (2k+1)\,\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$