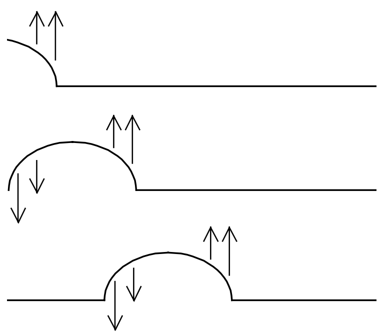
# 6 Mechanické vlnenie

## 6.1 Popis mechanického vlnenia

Mechanické vlnenie je šírenie sa kmitavého pohybu nejakým prostredím. Ak napr. s koncom lana, ktorý držíme v ruke, urobíme rýchly pohyb nahor a nadol, tento vzruch sa bude šíriť pozdĺž lana ako vlna (Obr.6.1). Zdrojom vlnenia je kmitavý pohyb a vzájomné silové pôsobenie medzi časticami prostredia spôsobí, že tento kmitavý pohyb sa bude šíriť na ďalšie častice prostredia. Hovoríme, že prostredím sa bude šíriť **vlnenie**.
Ak krajný bod kmitá netlmeným harmonickým (sinusoidálnym) pohybom a ak



Obr. 6.1

je prostredie dokonale pružné, vlnenie bude mať sínusový tvar v priestore aj v čase.
Maximálna výchylka vzhľadom k rovnovážnej polohe sa nazýva **amplitúda** vlnenia. Najkratšia vzdialenosť medzi dvoma bodmi, ktoré kmitajú s rovnakou fázou sa nazýva **vlnová dĺžka** $\lambda$. Plocha v priestore, ktorú tvoria body kmitajúce s rovnakou fázou, sa nazýva **vlnoplocha**. **Čelo vlny** je najvzdialenejšia vlnoplocha od zdroja vlnenia. Rýchlosť kmitajúcich častíc prostredia sa s časom periodicky mení. Táto rýchlosť sa líši od rýchlosti, ktorou sa prostredím šíri vlnenie. **Rýchlosť vlnenia** $v$ je rýchlosť, ktorou sa šíri vzruch teda napr. rýchlosť pohybu maxím vlnenia. Maximum vlnenia prejde vzdialenosť $\lambda$ počas periódy $T$ kmitov častíc. Potom pre rýchlosť vlnenia $v$ dostávame:

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad \text{alebo} \quad v = \lambda f,$$

pričom predpokladáme, že rýchlosť vlnenia $v$ nezávisí od $\lambda$ alebo $f$. Táto rýchlosť sa nazýva aj **fázová rýchlosť**, pretože je to rýchlosť, ktorou sa prostredím šíri rovnaká fáza kmitavého pohybu (výchylka).
Pre vlnovú dĺžku máme

$$\lambda = vT,$$

takže môžeme povedať, že vlnová dĺžka $\lambda$ je dráha, ktorú prejde fáza vlny počas jednej periódy $T$.
Ak častice prostredia (akým je napr. lano) kmitajú v smere kolmom na smer šírenia sa vlnenia, hovoríme o **priečnom** vlnení. Ak častice prostredia kmitajú v smere šírenia sa vlnenia, ide o **pozdĺžne** vlnenie.
Rýchlosť šírenia sa vlnenia závisí od vlastností prostredia, v ktorom sa šíri. Napr. rýchlosť vlny šíriacej sa napätou strunou je

$$v = \sqrt{\frac{F}{s}},$$

kde $F$ je sila ťahu na koncoch struny a $s$ je hmotnosť jednotkovej dĺžky struny. Rýchlosť pozdĺžnej vlny šíriacej sa pevnou tyčou je

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

kde $E$ je modul pružnosti v ťahu a $\rho$ je hustota materiálu.
Uvažujme vlnenie, ktoré sa šíri pozdĺž osi $x$ - napr. pozdĺž lana, takéto vlnenie sa nazýva **postupné vlnenie**. Za vzťažný bod zvolíme začiatok lana $x = 0$ (Obr. 6.2). Závislosť výchylky v tomto bode od času je vyjadrená funkciou $u\,(0,t) = u\,(t)$. Ak zanedbáme tlmenie, výchylka bodu vo vzdialenosti $x$ od začiatku bude opísaná takou istou funkciou času, iba bude oneskorená o časový interval $\tau$ potrebný k rozšíreniu sa vlnenia z počiatku do daného bodu - teda do vzdialenosti $x$. Takže môžeme písať:

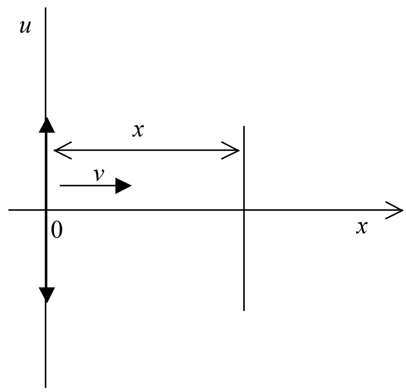
$$u\,(x,t) = u\,(t') \quad \text{a} \quad t' = t - \tau.$$

Ak sa vlnenie šíri rýchlosťou $v$

$$\tau = \frac{x}{v},$$

pre výchylku bodu vo vzdialenosti $x$ od zdroja vlnenia dostávame:

$$u\,(x,t) = u\,(t') = u\,(t-\tau) = u\left(t - \frac{x}{v}\right).$$




Obr. 6.2

Je zrejmé, že pre vlnenie postupujúce v opačnom smere a pre ten istý vzťažný bod $x = 0$, môžeme písať:

$$u\,(x,t) = u\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Tieto rovnice sú všeobecným matematickým popisom vlnenia ľubovoľného tvaru šíriaceho sa v smere osi $x$ doprava (rastúce $x$) a tiež doľava (klesajúce $x$).
Pre špeciálny prípad harmonickej vlny platí:

$$u\,(t) = A \sin \omega t$$

a

$$u\,(x,t) = A \sin \omega t' = A \sin \omega\,(t \mp \tau) = A \sin \omega \left(t \mp \frac{x}{v}\right).$$

Keďže pre **uhlovú frekvenciu** platí $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, vlnová dĺžka $\lambda = vT = \frac{v}{f}$ a ak zavedieme tzv. **uhlové vlnové číslo** $k$ ako $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, môžeme predchádzajúcu rovnicu písať aj nasledovných tvaroch:

$$\begin{aligned} u\,(x,t) &= A \sin \omega \left(t \mp \tfrac{x}{v}\right) = A \sin \left(\tfrac{2\pi}{T} t \mp \tfrac{2\pi}{T} \tfrac{x}{v}\right) = \\ &= A \sin \left(\omega t \mp \tfrac{2\pi}{\lambda} x\right) = A \sin 2\pi \left(f t \mp \tfrac{x}{\lambda}\right) = A \sin\,(\omega t \mp kx)\,. \end{aligned}$$

## 6.2 Vlnová rovnica

Uvažujme všeobecnú funkciu $u\,(x,t) = f\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$, kde $f$ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia $x$ a $t$. Označme $p = t \pm \frac{x}{v}$.

Urobme parciálne derivácie:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 1, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \pm\frac{1}{v},$$

pre prvé derivácie funkcie $u\,(x,t)$ dostaneme nasledujúce rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \pm\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}p^2}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{v} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}p^2}\frac{1}{v^2}.$$

Ak druhú rovnicu upravíme do tvaru

$$v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}p^2},$$

je zrejmé, že platí:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Táto rovnica je jednorozmernou **vlnovou rovnicou**, ktorou sa popisuje vlnenie šíriace sa v jednom smere. Pre vlnenie, ktoré sa šíri v trojrozmernom priestore, môžeme napísať analogickú rovnicu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Ak táto rovnica má napr. dve rôzne riešenia potom aj ich lineárna kombinácia

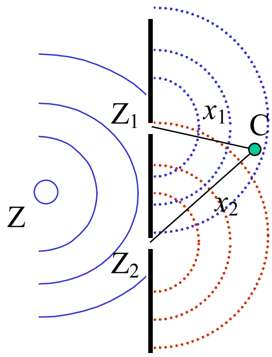
$$u_3\,(x,t) = au_1\,(x,t) + bu_2\,(x,t)\,,$$

kde $a$ a $b$ sú konštanty, je riešením vlnovej rovnice. Toto tvrdenie je podstatou **princípu superpozície**, ktorý hovorí, že ak dve vlnenia prechádzajú tým istým miestom priestoru v rovnakom časovom okamihu, výsledná výchylka sa rovná súčtu jednotlivých výchyliek.

## 6.3 Interferencia vlnení

Interferencia je fyzikálny jav, ktorý nastane, ak dve alebo viac vlnení prechádza tým istým miestom v rovnakom časovom okamihu.

Uvažujme dve vlnenia, ktoré sa šíria z dvoch zdrojov kmitajúcich s rovnakou frekvenciou a fázou, ale rôznou amplitúdou. Takéto zdroje vlnenia nazývame




Obr. 6.3

koherentnými. Príklad koherentných zdrojov ($Z_1$, $Z_2$) je ukázaný na Obr. 6.3. Uvažované vlnenia možno popísať nasledovne:

$$u_1 = A_1 \sin(\omega t - kx_1)\,, \quad u_2 = A_2 \sin(\omega t - kx_2)\,.$$

Využitím princípu superpozície pre výsledné vlnenie dostaneme:

$$u = u_1 + u_2 = A_1 \sin(\omega t - kx_1) + A_2 \sin(\omega t - kx_2) = A \sin(\omega t - kx)\,,$$

kde $x = x_2 - x_1$.
Výsledné vlnenie bude mať sínusový priebeh s amplitúdou (podobne ako to bolo v prípade skladania dvoch rovnosmerných kmitavých pohybov s rovnakou frekvenciou):

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[k\left(x_2 - x_1\right)\right]}.$$

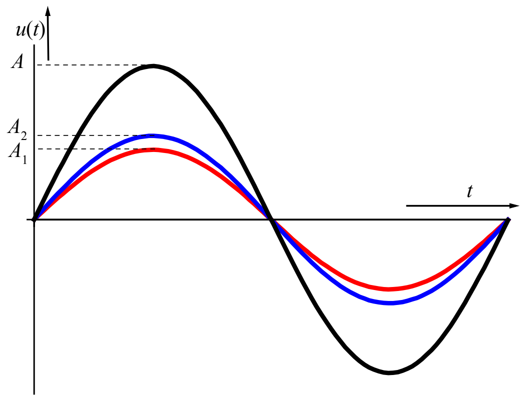
Amplitúda výsledného vlnenia je maximálna, t.j. $A = A_1 + A_2$, keď $\cos k\,(x_2 - x_1) = +1$ a teda pre rozdiel fáz platí:

$$k\,|x_2 - x_1| = n2\pi, \qquad n = 0, 1, 2, ....$$

Pre dráhový rozdiel dostaneme:

$$|x_2 - x_1| = n\lambda = 2n\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

čo znamená, že výsledná amplitúda bude maximálna ak dráhový rozdiel $x_2 - x_1$ bude rovný celočíselnému násobku vlnovej dĺžky (Obr. 6.4). Amplitúda bude




Obr. 6.4

minimálna, t.j. $A = |A_1 - A_2|$, keď $\cos k\,(x_2 - x_1) = -1$ a teda pre rozdiel fáz platí:

$$k\,|x_2 - x_1| = (2n+1)\,\pi, \qquad n = 0, 1, 2, ....$$

Pre dráhový rozdiel dostaneme:

$$|x_2 - x_1| = (2n+1)\,\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, ....$$

V tomto prípade vlnenia majú opačnú fázu (Obr. 6.5) a ak ich amplitúdy sú rovnaké, výsledná amplitúda je nulová.

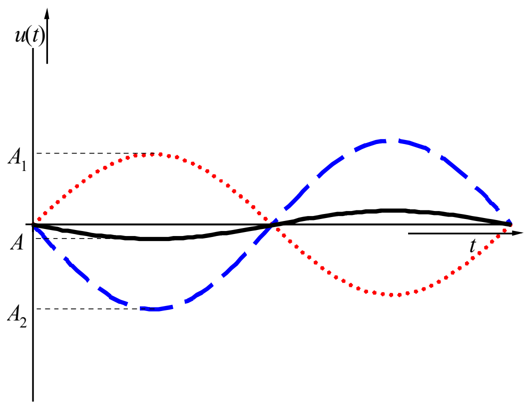
## 6.4 Stojaté vlnenie

Ak sa prostredím šíria dve mechanické vlny v smere osi $x$ a postupujú proti sebe, ich výchylky možno popísať rovnicami:

$$u_1 = A \sin 2\pi \left( ft - \frac{x}{\lambda} \right), \quad u_2 = A \sin 2\pi \left( ft + \frac{x}{\lambda} \right).$$

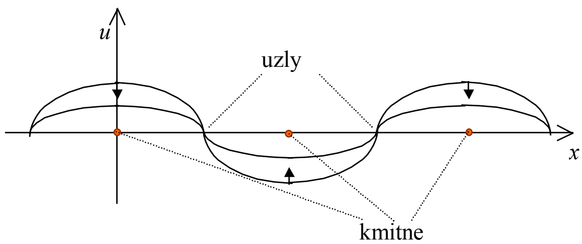
Vlnenie šíriace sa jedným smerom bude interferovať s vlnením šíriacim sa opačným smerom:

$$u = u_1 + u_2 = A \sin 2\pi ft \cos 2\pi \tfrac{x}{\lambda} - A \cos 2\pi ft \sin 2\pi \tfrac{x}{\lambda} + A \sin 2\pi ft \cos 2\pi \tfrac{x}{\lambda} +$$
$$+ A \cos 2\pi ft \sin 2\pi \tfrac{x}{\lambda} = 2A \cos 2\pi \tfrac{x}{\lambda} \sin 2\pi ft = C \sin 2\pi ft,$$




Obr. 6.5

kde $C = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$ je amplitúda výsledného vlnenia. Táto amplitúda závisí od




Obr. 6.6

polohy $x$, ale nezávisí od času $t$.
Miesta s nulovou amplitúdou ($C = 0$), ktoré sa nazývajú **uzly**, a miesta s maximálnou amplitúdou ($C = 2A$), ktoré sa nazývajú **kmitne**, výsledného vlnenia ostávajú v nemenných polohách (Obr. 6.6). Body medzi dvomi najbližšími uzlami kmitajú v rovnakých fázach. Výsledné vlnenie sa nazýva **stojaté vlnenie**.

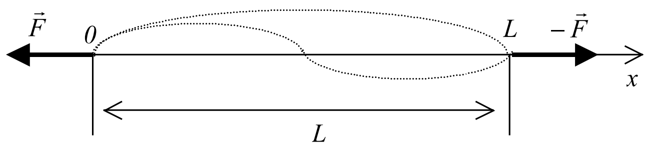
Pre polohu uzlov ($\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} = 0$) dostávame:

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = (2n+1)\,\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x = (2n+1)\,\frac{\lambda}{4}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Poloha kmitní ($\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm 1$) je určená:

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = n\pi \;\Rightarrow\; x = n\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Vzdialenosť medzi dvomi uzlami (aj kmitňami) je $d = \frac{\lambda}{2}$.




Obr. 6.7

***Struna upevnená na obidvoch koncoch***

Uvažujme strunu upevnenú v bodoch $x = 0$ a $x = L$, kde $L$ je dĺžka struny (Obr.6.7). Pre koncové body máme

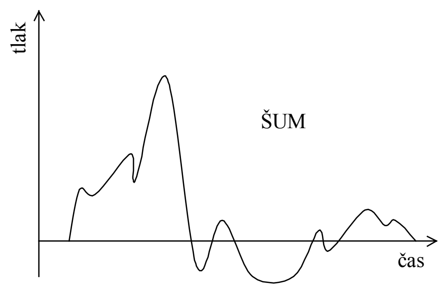
$$u\,(0) = u\,(L) = 0.$$

Na takejto strune sa môžu vytvoriť len také stojaté vlny, ktoré majú uzly v jej koncových bodoch a pre možné vlnové dĺžky stojatej vlny platí, že dĺžka struny je celočíselným násobkom $\frac{\lambda}{2}$:

$$\lambda_1 = 2L,\ \lambda_2 = L,\ \lambda_3 = \frac{2}{3}L, ... \text{ teda } \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Ak využijeme súvis uhlovej frekvencie a vlnovej dĺžky $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{\lambda}$ a dosadíme doň možné vlnové dĺžky $\lambda_n = \frac{2L}{n}$, získame možné uhlové frekvencie: $\omega_n = n\frac{\pi v}{L}$ alebo frekvencie: $f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1$.

Frekvencie $f_n$ sa nazývajú **vlastné frekvencie**, pričom každá je celočíselným násobkom najnižšej vlastnej frekvencie $f_1$, ktorá sa nazýva **základnou frekvenciou**.



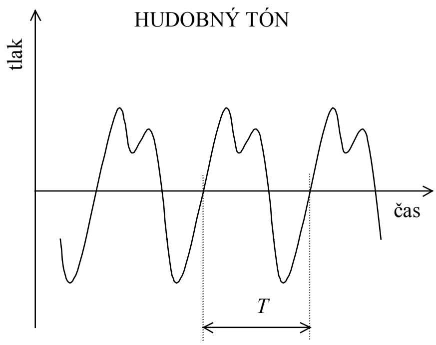

Obr. 6.8

Ďalšie frekvencie, ktoré sú celočíselnými násobkami základnej, sa nazývajú aj **vyššími harmonickými frekvenciami**. Pohyb rozkmitanej struny je teda zložený z harmonických kmitov s niekoľkými vlastnými frekvenciami a struna vydáva tón.

Vysvetlíme si, čím sa líši hudobný tón od šumu, ktorý tiež patrí medzi zvuky, ktoré počujeme. Šumu odpovedajú nepravidelné kmity ušného bubienka vyvolané nepravidelným kmitaním zdroja tohto zvuku. Zvuk sa šíri vzduchom ako pozdĺžne vlnenie a graf závislosti tlaku vzduchu na bubienok v závislosti od času je na Obr. 6.8. Analogická grafická závislosť pre hudobný tón je na Obr. 6.9. Tento graf sa líši od predchádzajúceho tým, že je periodický. Hudobný tón sa charakterizuje hlasitosťou, výškou a farbou. **Hlasitosť** je určená veľkosťou tlaku akustickej vlny na ušný bubienok. **Výška tónu** je určená základnou frekvenciou akustickej vlny. Ak znejú dva tóny tej istej hlasitosti a výšky vydávané dvomi rôznymi hudobnými nástrojmi, vnímame medzi nimi rozdiely, hovoríme, že majú rôznu **farbu**.

V prípade struny sme zistili, že vlastné kmity majú frekvencie, ktoré sú celočíselnými násobkami základnej frekvencie $f_1$. Najvšeobecnejší pohyb rozkmitanej struny je preto zložený z harmonických kmitov so základnou frekvenciou $f_1$ a kmitov s vyššími harmonickými frekvenciami - $2f_1, 3f_1, 4f_1, \dots$ . Perióda základného tónu a vyšších harmonických tónov sú nepriamo úmerné príslušnej frekvencii a preto rozkmitaná struna opakuje formu svojho pohybu s periódou $T_1$ a tým vytvára hudobný tón.

Každú funkciu, ktorá je periodická s periódou $T$, možno matematicky vyjadriť



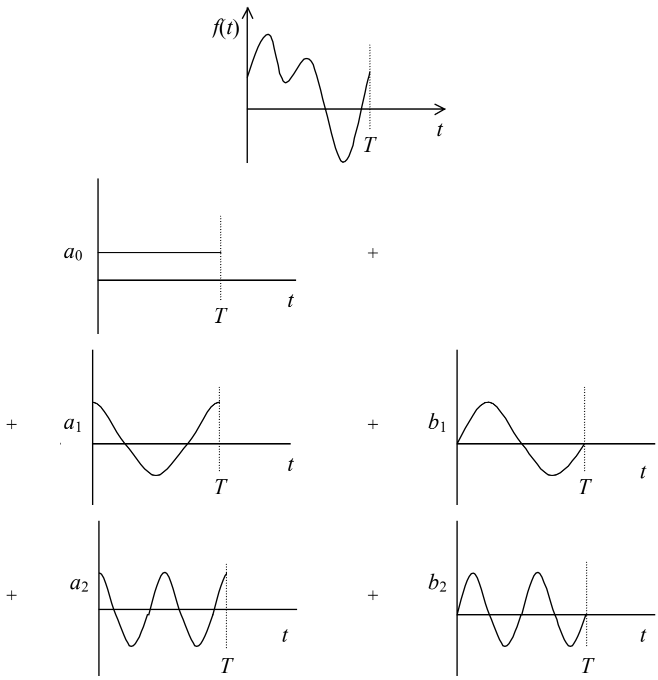

Obr. 6.9

v tvare:

$$f\,(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + ...$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $a_i$, $b_i$ sú konštanty, ktoré hovoria s akou váhou je $i$-tá zložka kmitov prítomná vo výslednom kmite. Predchádzajúca rovnica sa nazýva **Fourierovým radom** (Obr. 6.10).

Funkcia $f(t)$, ktorá vyjadruje závislosť tlaku akustickej vlny v prípade hudobného tónu, sa preto bude dať vyjadriť ako súčet jednoduchých harmonických funkcií, ktoré popisujú základný tón a vyššie harmonické tóny. Farba tónu je určená rôznym zastúpením vyšších harmonických frekvencií, vo Fourierovom rade je ich zastúpenie dané hodnotami koeficientov $a_i$, $b_i$ pre $i > 1$.




Obr. 6.10