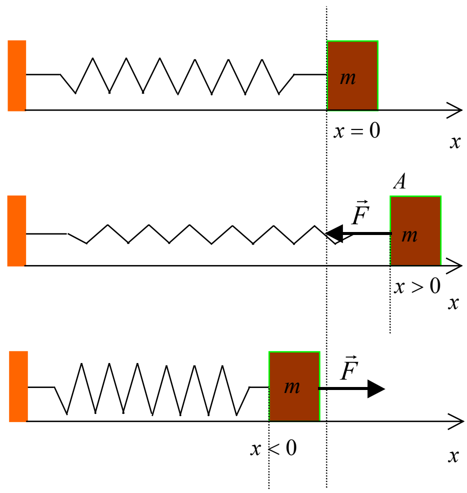
5 Mechanický kmitavý pohyb

5.1 Netlmený harmonický kmitavý pohyb

Pod kmitanie a vlnenie zahŕňame široké spektrum fyzikálnych procesov - od mechanických kmitov a vĺn, cez elektromagnetické kmity a vlny, až k vlnám popisujúcim vlnové vlastnosti častíc. Aj keď všetky uvedené deje majú rôznu fyzikálnu podstatu, ich formálny - matematický popis sa zásadne nelíši.
Mechanickým kmitavým pohybom (mechanickým kmitaním - osciláciami)



Obr. 5.1

nazývame taký mechanický pohyb hmotného bodu, pri ktorom je hmotný bod viazaný na istú, tzv. rovnovážnu polohu, a to tak, že pri svojom pohybe neprekročí konečnú vzdialenosť od tejto polohy. Ak je časový priebeh pravidelný, t.j. opakuje sa po istom časovom intervale T (perióda), ide o periodický kmitavý pohyb. Ak sa kmitavý pohyb dá popísať pomocou funkcií sínus a kosínus, hovoríme o **harmonickom** kmitavom pohybe. Dá sa ukázať, že ľubovoľný kmitavý pohyb možno vyjadriť ako superpozíciu harmonických kmitavých pohybov (Fourierova veta), preto harmonický kmitavý pohyb možno pokladať za základný typ periodického pohybu.
Majme kocku hmotnosti m upevnenú na konci pružiny, ktorá sa môže kĺzať

bez trenia po vodorovnej podložke s ideálne hladkým povrchom (Obr.5.1). Ak nepôsobí vonkajšia sila, kocka na pružine je v pokoji v rovnovážnej polohe. Ak vonkajšou silou posunieme kocku do polohy A, pružina sa natiahne a ak následne kocku pustíme, bude vplyvom pružných síl vykonávať pohyb po priamke okolo rovnovážnej polohy s najväčšou výchylkou A striedavo na obidve strany od rovnovážnej polohy. V takomto ideálnom prípade, ak neuvažujeme odporové sily (trenie, odpor vzduchu), bude kocka vykonávať netlmený kmitavý pohyb. Sila, ktorá na kocku pôsobí, je priamo úmerná výchylke (konštanta úmernosti k charakterizuje elastické vlastnosti pružiny tzv. tuhosť pružiny) a je orientovaná smerom k rovnovážnej polohe, teda proti smeru výchylky:

$$\vec{F} = -k\vec{x}, \tag{5.1}$$

alebo v skalárnom tvare:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$$
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x,$$

kde x je výchylka a $\frac{k}{m} = \omega^2$ je kladná konštanta. Získali sme diferenciálnu rovnicu, ktorej všeobecné riešenie môžeme napísať v jednom z nasledovných tvarov:

$$x = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$
$$x = A\sin(\omega t + \gamma)$$
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)\,.$$

Tieto tri tvary sú úplne ekvivalentné, pretože ak napr. posledné vyjadrenie rozpíšeme podľa súčtového vzorca pre $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, dostaneme:

$$x = A\cos\omega t\cos\varphi - A\sin\omega t\sin\varphi$$

a označíme $a = A\cos\varphi$ a $b = -A\sin\varphi$, dostaneme prvé vyjadrenie riešenia.
V ľubovoľnom časovom okamihu teda vieme vyjadriť výchylku kmitajúceho bodu. Konštanta A je daná počiatočným natiahnutím pružiny z rovnovážnej polohy a nazýva sa **amplitúda** (maximálna výchylka) kmitov. Fázová konštanta φ je začiatočná fáza. Ak budeme napr. uvažovať riešenie $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, fázová konštanta je určená výchylkou v okamihu $t = 0$. Počiatok merania času

môžeme zvoliť tak, že $\varphi = 0$, t.j. meranie začneme v okamihu, kedy hmotný bod dosiahol svoju maximálnu výchylku.
Riešením diferenciálnej rovnice pre netlmený kmitavý pohyb je napr. kosínusoida s amplitúdou A a fázovou konštantou φ, je to teda netlmený harmonický kmitavý pohyb - **netlmené harmonické oscilácie**.
Ak **dobou kmitu** alebo periódou T nazveme časový interval, za ktorý sa oscilátor vráti späť do danej polohy (jeden kmit), dostaneme:

$$A\cos(\omega t) = A\cos[\omega(t+T)]$$

a teda

$$\omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

kde ω je uhlová frekvencia kmitavého pohybu. **Frekvencia** f je počet kmitov za jednotku času (za sekundu):

$$f = \frac{1}{T}.$$

Rýchlosť a zrýchlenie kmitajúceho hmotného bodu môžeme vyjadriť nasledovne:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi),$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi).$$

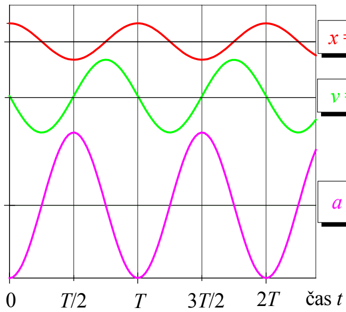
Časové priebehy výchylky, rýchlosti a zrýchlenia sú na Obr.5.2. Celková mechanická energia netlmene kmitajúceho hmotného bodu hmotnosti m bude rovná súčtu jeho kinetickej a potenciálnej energie.
Pre kinetickú energiu platí:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi).$$

Potenciálnu energiu vzhľadom na rovnovážnu polohu určíme ako prácu potrebnú na vychýlenie z rovnovážnej polohy:

$$\begin{array}{l} E_p = -\int\limits_0^x F\mathrm{d}x = \int\limits_0^x kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2 = \\ = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \varphi) \end{array}.$$

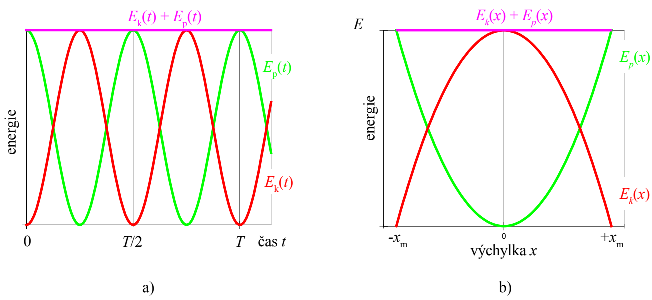
Celková mechanická energia pri netlmenom harmonickom kmitavom pohybe sa zachováva. Ak sa hmotný bod nachádza vo svojej maximálnej výchylke, je jeho



Obr. 5.2

potenciálna energia maximálna a keďže má rýchlosť nulovú, jeho kinetická energia je v tomto bode nulová. Pri prechode rovnovážnou polohou je jeho rýchlosť i kinetická energia maximálna a potenciálna energia je nulová. Teda s rastom kinetickej energie klesá potenciálna energia a naopak, a to tak, že ich súčet je v ľubovoľných okamihoch (Obr.5.3a) a pri ľubovoľnej výchylke (Obr.5.3b) rovnaký.
Pre celkovú energiu dostaneme:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \left[\sin^2 (\omega t + \varphi) + \cos^2 (\omega t + \varphi) \right] = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = \text{konšt.}$$



Obr. 5.3

5.2 Skladanie kmitov

5.2.1 Skladanie rovnosmerných kmitov

1) Nech je hmotný bod nútený konať súčasne dva netlmené harmonické kmitavé pohyby s rovnakou frekvenciou, ale rôznymi amplitúdami a fázovými konštantami, dané rovnicami:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)\,.$$

Výchylka výsledného pohybu sa v každom okamihu rovná algebraickému súčtu výchyliek x_1 a x_2:

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)\,.$$

Využijeme súčtový vzorec:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

a označíme:

$$\begin{aligned} A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 &= A \cos\varphi \\ A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 &= A \sin\varphi \end{aligned} \tag{5.2}$$

Pre výchylku výsledného pohybu potom dostaneme:

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi)\,,$$

teda ide opäť o netlmený harmonický kmitavý pohyb s rovnakou frekvenciou a výslednou amplitúdou A a fázovou konštantou φ, pre ktoré z rovníc (5.2) platí:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$

Ak pre fázový rozdiel platí:

$$|\varphi_2 - \varphi_1| = k2\pi, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

potom výsledná amplitúda nadobúda svoju maximálnu hodnotu:

$$A = A_1 + A_2.$$

V tomto prípade majú skladané kmitavé pohyby rovnakú fázu a výsledná amplitúda sa rovná súčtu amplitúd skladaných kmitov.
Pre fázový rozdiel:

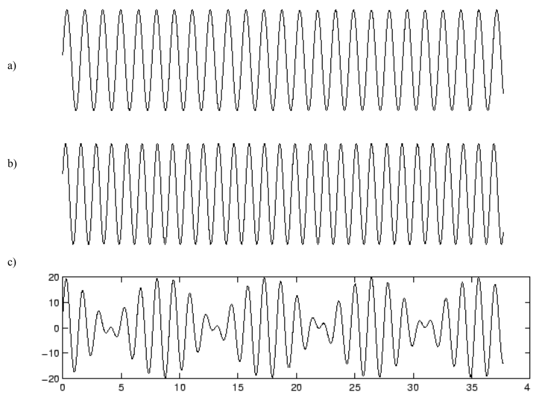
$$|\varphi_2 - \varphi_1| = (2k+1)\,\pi, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

sa výsledná amplitúda rovná rozdielu amplitúd jednotlivých pohybov:

$$A = |A_1 - A_2|$$

a hovoríme o skladaní kmitov s opačnou fázou. Ak sa pritom amplitúdy rovnajú, dochádza k úplnému potlačeniu kmitavého pohybu.

2) Uvažujme opäť dva rovnosmerné harmonické kmitavé pohyby, ale nech tieto majú teraz rovnaké amplitúdy a fázové konštanty a nech sa líšia frekvenciami:



Obr. 5.4

$$x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi)$$
$$x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi)\,.$$

Ak využijeme vzťah:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

dostaneme

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right).$$

Ak predpokladáme, že frekvencie skladaných kmitov sa od seba len málo líšia (v porovnaní s absolútnou veľkosťou frekvencie), môžeme sa na výsledný kmitavý pohyb pozerať ako na harmonický pohyb so začiatočnou fázou φ, uhlovou frekvenciou ω a amplitúdou B, pre ktoré platí:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad B = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right).$$

Amplitúda výsledného kmitavého pohybu sa potom mení s relatívne malou frekvenciou, pre ktorú platí:

$$\omega' = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}.$$

Graficky je tento kmitavý pohyb znázornený na Obr. 5.4c. Amplitúda kmitavého pohybu dosahuje periodicky maximá a minimá. O harmonickom pohybe takéhoto typu hovoríme, že sa vyznačuje **rázmi**. Periódu rázov dostaneme ako minimálny časový interval, za ktorý amplitúda dosiahne opäť minimum (maximum):

$$T_r = \frac{T'}{2} = \frac{\frac{2\pi}{\omega'}}{2} = \frac{\pi}{\omega'} = \frac{\pi}{\left|\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right|} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{T_2} - \frac{2\pi}{T_1}\right|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right|}$$

a pre frekvenciu:

$$f_r = \frac{1}{T_r} = \left|\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right| = |f_2 - f_1|.$$

Frekvencia rázov sa teda rovná rozdielu frekvencií skladaných kmitov a je zrejmé, že pri rovnosti týchto frekvencií rázy vymiznú.

5.2.2 Skladanie kmitov na seba kolmých

Nech hmotný bod koná súčasne dva harmonické kmitavé pohyby, jeden v priamke x a druhý v priamke y kolmej na priamku x, frekvencia oboch kmitov nech je rovnaká, ale nech majú rôzne amplitúdy a fázové konštanty:

$$x = A\sin(\omega t + \alpha)$$
$$y = B\sin(\omega t + \beta).$$

Po úprave dostaneme:

$$\frac{x}{A} = \sin(\omega t)\cos(\alpha) + \cos(\omega t)\sin(\alpha) \qquad /.\cos(\beta) \qquad /.\sin(\beta)$$

$$\frac{y}{B} = \sin(\omega t)\cos(\beta) + \cos(\omega t)\sin(\beta) \qquad /.\cos(\alpha) \qquad /.\sin(\alpha)$$

Po postupnom vykonaní naznačených operácií a vzájomnom odčítaní rovníc dostaneme:

$$\begin{aligned}&\tfrac{x}{A}\cos(\beta) - \tfrac{y}{B}\cos(\alpha) = \\ &= \cos(\omega t)\left[\sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)\right] = \cos(\omega t)\sin(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{x}{A}\sin(\beta) - \tfrac{y}{B}\sin(\alpha) = \\ &= \sin(\omega t)\left[\cos(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\beta)\sin(\alpha)\right] = \sin(\omega t)\sin(\beta-\alpha)\end{aligned}$$

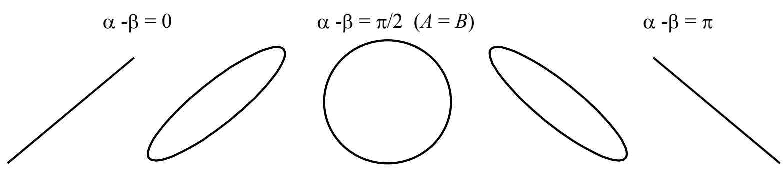
Po umocnení a sčítaní oboch rovníc dostaneme:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\left(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\right) = \sin^2(\alpha-\beta)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos(\alpha-\beta) = \sin^2(\alpha-\beta)\,.$$

Dostávame takto všeobecnú rovnicu elipsy, ktorej vlastnosti sú určené rozdielom fáz skladaných kmitov.

Uvedieme niektoré špeciálne prípady:



Obr. 5.5

1)$\alpha = \beta$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB} = \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{A} - \frac{y}{B} = 0 \Rightarrow y = \frac{B}{A}x$$

Posledná rovnica je rovnicou priamky prechádzajúcej začiatkom súradnicovej sústavy so smernicou B/A. Hmotný bod koná harmonické kmity po tejto priamke.
2)$\alpha - \beta = \pi$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + 2\frac{xy}{AB} = \left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{B}{A}x$$

Teraz teda hmotný bod kmitá v priamke so smernicou $-B/A$.
3)$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Je to rovnica elipsy, ktorej osi spadajú do smeru súradných osí x, y. Ak $\alpha - \beta = \pi/2$, hmotný bod sa pohybuje v smere hodinových ručičiek. V špeciálnom prípade, keď $A = B$:

$$x^2 + y^2 = A^2$$

rovnica elipsy prechádza na rovnicu kružnice, hmotný bod sa bude pohybovať po kružnici polomeru A s uhlovou rýchlosťou ω. To znamená, že zložením dvoch na seba kolmých kmitavých pohybov s rovnakou amplitúdou, rovnakou frekvenciou a s fázovým rozdielom $\frac{\pi}{2}$:

$$x = A\cos(\omega t)$$

$$y = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\sin(\omega t)$$

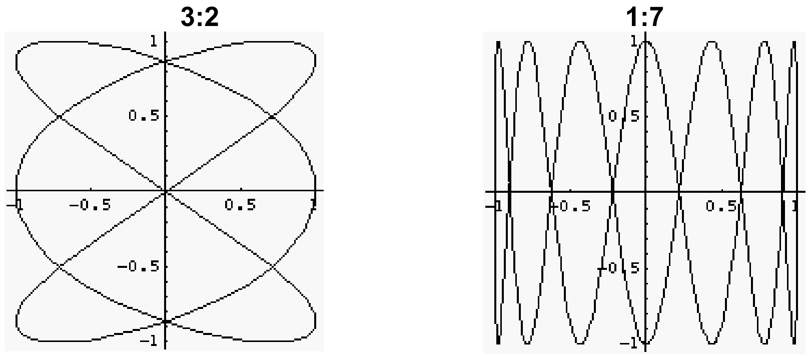
dostávame pohyb po kružnici (Obr.5.5 5.5). Ak hmotný bod koná rovnomerný pohyb po kružnici s uhlovou rýchlosťou ω, možno ho rozložiť na dva na seba kolmé kmitavé pohyby.

Ak budeme skladať dva na seba kolmé kmitavé pohyby s frekvenciami v pomere malých celých čísel, dostaneme pre výsledný pohyb zložitejšie krivky - tzv. Lissajousove krivky (Obr.5.6).

5.3 Tlmený kmitavý pohyb

Pri reálnom kmitavom pohybe pôsobia na hmotný bod odporové sily (popri harmonickej sile), ktoré postupne jeho pohyb utlmia. Pri malých rýchlostiach je tlmiaca sila približne priamo úmerná rýchlosti a môžeme ju teda popísať vzťahom:

$$F = -k_b v,$$



Obr. 5.6

kde $k_b > 0$. Táto sila je orientovaná proti smeru rýchlosti.
Na hmotný bod pôsobia dve sily - harmonická a odporová, preto Newtonov zákon sily môžeme v tomto prípade zapísať:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - k_b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Ak označíme

$$\frac{k_b}{m} = 2b, \quad \frac{k}{m}=\omega_0^2,$$

kde b je tzv. koeficient tlmenia a ω_0 je uhlová frekvencia netlmeného kmitavého pohybu, potom rovnica má tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0.$$

Získali sme diferenciálnu rovnicu druhého rádu bez pravej strany s konštantnými koeficientami, ktorú budeme riešiť pomocou substitúcie:

$$x = ze^{-bt},$$

kde z je funkciou času: $z = f(t)$. Po zderivovaní, dosadení do diferenciálnej rovnice a úprave dostávame rovnicu:

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\omega_0^2 - b^2\right)z.$$

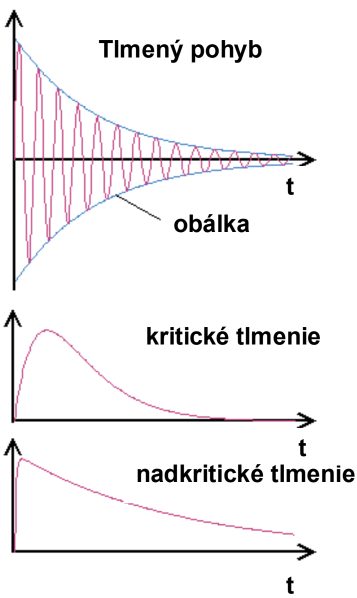
Ak $\omega_0 > b$ a označíme: $\omega_0^2 - b^2 = \omega^2$, potom dostaneme riešenie predchádzajúcej rovnice v tvare:

$$z = A\cos(\omega t + \varphi)\,.$$

S ohľadom na zavedenú substitúciu môžeme pre časovú závislosť výchylky písať:

$$x = Ae^{-bt}\cos(\omega t + \varphi)\,.$$

Amplitúda tlmeného kmitavého pohybu Ae^{-bt} teda s časom exponenciálne



Obr. 5.7

klesá. Uhlová frekvencia $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - b^2)}$ je menšia ako by bola pri pohybe bez tlmenia. Doba kmitu $T = \frac{2\pi}{\omega}$ je väčšia v porovnaní s netlmeným kmitavým pohybom (Obr.5.7). Takýto kmitavý pohyb tlmením zanikne, jeho mechanická energia sa postupne premení na vnútornú energiu prostredia.
Tlmený kmitavý pohyb nastane, ak $\omega_0^2 > b^2$.
Pre $\omega_0^2 - b^2 = 0$, diferenciálna rovnica $\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = 0$ má riešenie $z = A + Bt$ a ide o tzv. kritické tlmenie: $x = (A + Bt)\,e^{-bt}$ (Obr.5.7).

Ak $b^2 > \omega_0^2$, periodický pohyb nevzniká, je to prípad nadkritického tlmenia (posledná časť obrázku). Označme $b^2 - \omega_0^2 = c^2$, potom výslednú diferenciálnu rovnicu môžeme zapísať v tvare:
$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = c^2 z$ a jej riešenie je $z(t) = Ae^{ct} + Be^{-ct}$. Riešenie pre výchylku potom má tvar: $x = Ae^{(c-b)t} + Be^{-(c+b)t}$.
Na popis tlmeného kmitavého pohybu sa okrem uvedených charakteristík používajú nasledovné veličiny:
- **útlm** definovaný ako podiel dvoch po sebe nasledujúcich výchyliek (napr. maximálnych), medzi ktorými je časový interval T:

$$\lambda = \frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{Ae^{-bt}}{Ae^{-b(t+T)}} = e^{bT}$$

- **logaritmický dekrement útlmu** definovaný vzťahom:

$$\delta = \ln\lambda = bT.$$

5.4 Vynútený kmitavý pohyb

Tlmené kmity po určitom čase zaniknú. Ak má hmotný bod dlhodobo vykonávať kmitavý pohyb, je nutné pôsobiť naň periodicky sa meniacou vonkajšou silou. Takúto silu nazývame **vynucujúca sila** a môžeme ju zapísať:

$$F' = H\cos(\Omega t),$$

kde Ω je uhlová frekvencia a H amplitúda vynucujúcej sily.
Pohybová rovnica takéhoto oscilátora (obmedzujeme sa na pohyb po priamke) teraz bude:

$$F = -kx - k_b v_x + H\cos(\Omega t)$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - k_b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + H\cos(\Omega t)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = h\cos(\Omega t),$$

kde $2b = \frac{k_b}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $h = \frac{H}{m}$.
Z matematického hľadiska ide o difererenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientmi a pravou stranou. Všeobecné riešenie takejto rovnice sa skladá z všeobecného riešenia rovnice bez pravej strany a z partikulárneho riešenia rovnice s pravou stranou. Všeobecné riešenie rovnice bez pravej strany sme našli pri riešení tlmených kmitov a vyjadrili sme ho v tvare:

$$x_1 = Be^{-bt}\cos(\omega t + \varphi),$$

kde B je amplitúda v čase $t = 0$.
Partikulárne riešenie rovnice s pravou stranou hľadajme skusmo v tvare:

$$x_2 = A\cos\left(\Omega t + \alpha\right),$$

kde α, A sú konštanty. V ďalšom urobíme príslušné derivácie, dosadíme do diferenciálnej rovnice a postupne upravujeme:

$$\frac{dx_2}{dt} = -A\Omega\sin\left(\Omega t + \alpha\right), \frac{d^2x_2}{dt^2} = -A\Omega^2\cos\left(\Omega t + \alpha\right)$$

$$-A\Omega^2\cos\left(\Omega t + \alpha\right) - 2bA\Omega\sin\left(\Omega t + \alpha\right) + \omega_0^2 A\cos\left(\Omega t + \alpha\right) = h\cos\left(\Omega t\right).$$

Použitím súčtových vzorcov a nasledovnými úpravami postupne dostaneme:

$$\begin{aligned}&-A\Omega^2\left(\cos\Omega t\cos\alpha - \sin\Omega t\sin\alpha\right) - 2bA\Omega\left(\sin\Omega t\cos\alpha + \cos\Omega t\sin\alpha\right) + \\ &+\omega_0^2\mathrm{A}\left(\cos\Omega t\cos\alpha - \sin\Omega t\sin\alpha\right) = h\cos\left(\Omega t\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(-A\Omega^2\cos\alpha - 2bA\Omega\sin\alpha + \omega_0^2 A\cos\alpha - h\right)\cos\Omega t + \\ &+\left(A\Omega^2\sin\alpha - 2bA\Omega\cos\alpha - \omega_0^2 A\sin\alpha\right)\sin\Omega t = 0.\end{aligned}$$

Posledná rovnica platí pre ľubovoľný časový okamih len ak:

$$-A\Omega^2\cos\alpha - 2bA\Omega\sin\alpha + \omega_0^2 A\cos\alpha - h = 0$$

$$A\Omega^2\sin\alpha - 2bA\Omega\cos\alpha - \omega_0^2 A\sin\alpha = 0.$$

Úpravou dostaneme:

$$A\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\cos\alpha - 2bA\Omega\sin\alpha = h \tag{5.3}$$

$$A\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\sin\alpha + 2bA\Omega\cos\alpha = 0. \tag{5.4}$$

Po umocnení a sčítaní rovníc (5.3) a (5.4) dostaneme:

$$A^2\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4b^2A^2\Omega^2 = h^2$$

a teda

$$A = \frac{h}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4b^2\Omega^2}}.$$

Úpravou rovnice (5.4) môžeme získať hodnotu výslednej fázovej konštanty:

$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{2b\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

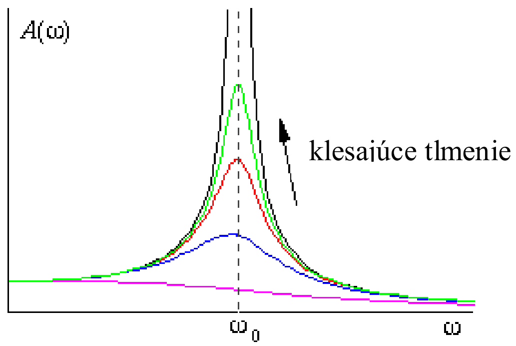
Možno sa presvedčiť, že ak konštanty A a α spĺňajú vyššie uvedené vzťahy, je navrhnutý výraz pre x_2 skutočne partikulárnym riešením danej diferenciálnej rovnice. Všeobecné riešenie teda bude mať tvar:

$$x = x_1 + x_2 = Be^{-bt}\cos(\omega t + \varphi) + A\cos(\Omega t + \alpha)\,.$$

Je zrejmé, že po uplynutí dostatočne dlhého časového intervalu prvý člen riešenia bude zanedbateľne malý, oscilátor bude v ustálenom stave a jeho pohyb bude popísaný rovnicou:

$$x = A\cos(\Omega t + \alpha)\,.$$

V ustálenom stave teda koná hmotný bod harmonický pohyb s uhlovou frek-



Obr. 5.8

venciou vynucujúcej sily α.
Amplitúda A a fázová konštanta α závisia od uhlovej frekvencie Ω sily, ktorá ich vynucuje, od vlastnej uhlovej frekvencie oscilátora ω_0 a od koeficientu tlmenia b. Vo všeobecnosti kmitanie nie je vo fáze s vynucujúcou silou. Takáto situácia by nastala keby nebolo tlmenie ($b = 0$).
Ďalej zo vzťahu pre A je zrejmé, že amplitúda vynútených kmitov je úmerná amplitúde vynucujúcej sily (h resp. H). Aj pri konštantnej amplitúde vynucujúcej sily H môžeme meniť amplitúdu vynútených kmitov A zmenou Ω. Nech h, ω_0, b sú konštantné a hľadajme pre akú uhlovú frekvenciu vynucujúcej sily bude amplitúda maximálna. Zo vzťahu pre amplitúdu A je zrejmé, že takáto situácia nastane, keď menovateľ bude minimálny, t.j keď bude minimálny výraz:

$$y = \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4b^2\Omega^2$$

a teda:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}\Omega} = 2\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)(-2\Omega) + 8b^2\Omega = 0$$

$$-4\Omega\left(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2b^2\right) = 0 \;\Rightarrow\; \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}.$$

Ak amplitúda vynútených kmitov dosahuje takéto maximum, hovoríme, že dochádza ku **rezonancii**. Posledný vzťah potom určuje rezonančnú frekvenciu vynútených kmitov. Pre maximálnu amplitúdu (rezonančnú) dostaneme vzťah:

$$A_r = \frac{h}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\left(\omega_0^2-2b^2\right)\right)^2+4b^2\left(\omega_0^2-2b^2\right)}} =$$
$$= \frac{h}{\sqrt{4b^4+4b^2\omega_0^2-8b^4}} = \frac{h}{2b\sqrt{\omega_0^2-b^2}}.$$

Bez tlmenia by k rezonancii došlo v prípade, keby sa rovnali uhlové frekvencie vlastných kmitov a vynucujúcej sily ($\Omega = \omega_0$). Amplitúda by bola v takomto prípade nekonečne veľká.

Pre $b \neq 0$ (teda v reálnych prípadoch) je amplitúda pri rezonancii vždy konečná a dosahuje sa pri frekvencii $\Omega < \omega_0$. Závislosť amplitúdy vynútených kmitov od uhlovej frekvencie Ω (alebo Ω/ω_0) sa nazýva rezonančnou krivkou. Je to závislosť s maximom pri rezonančnej frekvencii. Čím je b väčšie, tým menej ostré je toto maximum (Obr.5.8).