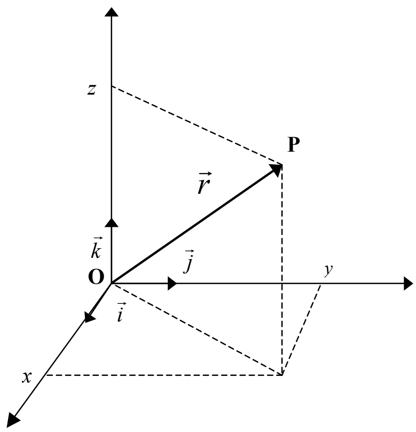
1 Kinematika hmotného bodu

1.1 Polohový vektor, rýchlosť, zrýchlenie bodu



Obr. 1.1

Najjednoduchšou zmenou, ktorú možno pozorovať v prípade telesa, je zmena jeho polohy vzhľadom k inému telesu v čase. Túto zmenu nazývame pohybom. Pri skúmaní pohybu sú dôležité odpovede na dva typy otázok - ako sa pohyb deje a prečo sa deje. Odpoveď na prvú otázku dáva kinematika, ktorá sa zaoberá matematickým popisom pohybu. Na druhú otázku odpovedá dynamika, ktorá skúma závislosť charakteru pohybu od jeho príčiny.
Pri niektorých pohyboch sa zaoberáme rozmermi, ktoré sú oveľa väčšie ako samotné rozmery telesa. V týchto prípadoch je vyhovujúcim priblížením nahradenie celého telesa jediným bodom, ktorému ešte priradíme vlastnosti dôležité z pohľadu dynamiky, takže budeme hovoriť o tzv. hmotnom bode. Je to myslený objekt (model), ktorý z hľadiska vzájomného pôsobenia s inými objektmi má vlastnosti reálneho telesa, pričom jeho rozmery sú zanedbateľné.
Poloha hmotného bodu v pravouhlej súradnicovej sústave je určená súradnicami x, y, z. Ak hmotný bod mení svoju polohu v čase, súradnice x, y, z sú funkciami času

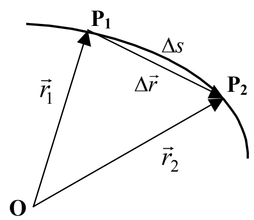
$$x = x\,(t)\,, \quad y = y\,(t)\,, \quad z = z\,(t)\,.$$

Polohu hmotného bodu možno popísať aj pomocou **polohového vektora** $\vec{r} =$

$\vec{r}\,(t)$:

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t)\,\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sú konštantné jednotkové vektory, ktorých veľkosť je jedna a sú orientované pozdĺž súradnicových osí v smere ich kladnej orientácie (Obr.1.1). Polohový vektor je vektor s počiatkom v počiatku súradnicovej sústavy a s koncovým bodom totožným s aktuálnou polohou hmotného bodu. Sled polôh, ktoré hmotný bod v priestore zaujíma, nazývame **trajektóriou** pohybu. Pre kvali-



Obr. 1.2

tatívne rozlíšenie a kvantitatívne hodnotenie rôznych mechanických pohybov definujeme ďalšie fyzikálne veličiny, medzi ktoré patria predovšetkým **rýchlosť** a **zrýchlenie**.

Nech hmotný bod, ktorý sa pohybuje z bodu P_1 s polohovým vektorom $\vec{r}_1$ do bodu P_2 s polohovým vektorom $\vec{r}_2$, prejde za časový interval Δt dráhu Δs (Obr.1.2).

Priemernú rýchlosť pohybujúceho sa bodu definujeme vzťahom:

$$v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ak uvažujeme čoraz menšiu priamu vzdialenosť medzi bodmi P_1 a P_2, časový interval Δt sa skracuje a rýchlosť sa blíži svojou hodnotou k okamžitej rýchlosti v v bode P_1, ktorá je definovaná vzťahom:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

So skracujúcim sa časovým intervalom sa zmenšuje rozdiel medzi $\Delta r = |\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ a Δs a v limitnom prípade ($\Delta t \to 0$) bude platiť: $\mathrm{d}r = \mathrm{d}s$. Okamžitú rýchlosť potom možno vyjadriť vzťahom:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

kde ds nazývame elementárnou dráhou a dt elementárnym časovým intervalom.
Vektor okamžitej rýchlosti je definovaný vzťahom:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}.$$

Okamžitá rýchlosť v bode P_1 je teda prvou deriváciou polohového vektora pohybujúceho sa hmotného bodu v bode P_1 podľa času. Z definície vyplýva, že rýchlosť má smer dotyčnice k dráhe pohybu v danom bode.
Vektor rýchlosti možno zapísať v zložkovom tvare:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

a pre príslušné súradnice vektora rýchlosti platí:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Veľkosť rýchlosti $|\vec{v}| = v$ vypočítame zo vzťahu:

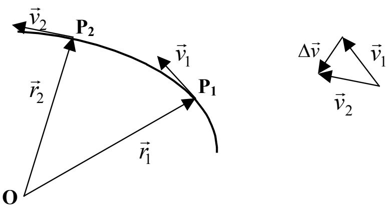
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Smer vektora okamžitej rýchlosti v súradnicovej sústave $(0,\ x,\ y,\ z)$ možno charakterizovať uhlami α_v, β_v, γ_v, ktoré zviera vektor okamžitej rýchlosti so súradnicovými osami x, y, z:

$$\cos\alpha_v = \frac{v_x}{v}, \quad \cos\beta_v = \frac{v_y}{v}, \quad \cos\gamma_v = \frac{v_z}{v}$$

Vo všeobecnosti vektor rýchlosti môže byť funkciou času. Na kvantifikovanie zmeny rýchlosti v čase definujeme veličinu, ktorá sa nazýva **zrýchlenie**.
Ak označíme $\Delta\vec{v}$ zmenu rýchlosti, ku ktorej došlo počas časového intervalu Δt (Obr.1.3), **priemerné zrýchlenie** definujeme vzťahom:

$$\vec{a}_s = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$



Obr. 1.3

Okamžité zrýchlenie bodu v danom mieste potom definujeme vzťahom:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

Okamžité zrýchlenie sa teda rovná prvej derivácii rýchlosti podľa času alebo druhej derivácii polohového vektora podľa času.
Pre vektor zrýchlenia v zložkovom tvare postupne dostaneme:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

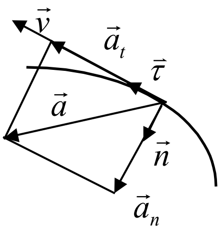
kde $a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{dt} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, $\quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$, $\quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$
Pre veľkosť a charakteristiku smeru zrýchlenia platia analogické vzťahy ako pre vektor rýchlosti:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\cos\alpha_a = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta_a = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma_a = \frac{a_z}{a}$$

Pri štúdiu všeobecného pohybu je často užitočné rozložiť zrýchlenie $\vec{a}$ na **tangenciálnu** $\vec{a}_t$ a **normálovú zložku** $\vec{a}_n$. Ako to vyplýva z názvu, tangenciálna zložka zrýchlenia $\vec{a}_t$ je zložka spadajúca do smeru dotyčnice (v smere jednotkového vektora $\vec{\tau}$) v danom bode dráhy a normálová zložka $\vec{a}_n$ je na ňu kolmá (v smere jednotkového vektora $\vec{n}$) (Obr. 1.4): Platí:

$$\vec{v} = v\vec{\tau}, \quad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \quad a = |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



Obr. 1.4

Vektor zrýchlenia možno vyjadriť pomocou definičného vzťahu takto:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\vec{\tau}) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$$

Zložka $\vec{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$ je rovnobežná s dotyčnicou v skúmanom bode.
Ukážeme, že normálová zložka zrýchlenia je kolmá na tangenciálnu zložku zrýchlenia. Platí:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1.$$

Diferencovaním tejto rovnice postupne dostaneme:

$$\mathrm{d}(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = 0,$$

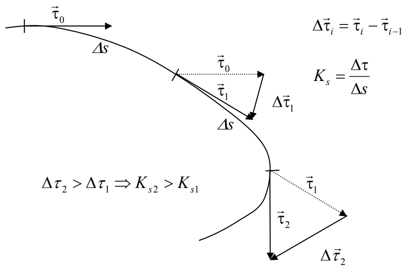
$$2\vec{\tau} \cdot \mathrm{d}\vec{\tau} = 0.$$

Z poslednej rovnice vyplýva, že platí $\vec{\tau} \perp \mathrm{d}\vec{\tau}$.
Zložka $\vec{a}_n = v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$ je teda kolmá na tangenciálnu zložku - je to normálová zložka zrýchlenia.
Vzťah pre normálové zrýchlenie môžeme upraviť pomocou tzv. polomeru krivosti. Uvažujme všeobecnú priestorovú krivku (Obr.1.5). Veličinu K, definovanú vzťahom

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{\Delta s} = \frac{|\mathrm{d}\vec{\tau}|}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s},$$

nazývame **krivosť** v danom bode. Jej prevrátená hodnota $R = \frac{1}{K}$ sa nazýva **polomer krivosti**.
Keďže platí $\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{R}$, normálová zložka zrýchlenia sa dá upraviť nasledovne:

$$\vec{a}_n = v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\vec{n} = v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{1}{R}\vec{n} = \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

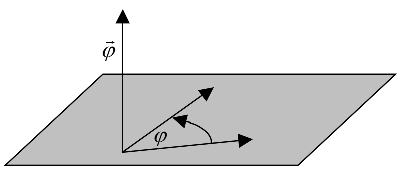


Obr. 1.5

Ak získané výsledky zhrnieme, dostávame pre jednotlivé zložky zrýchlenia vzťahy:

$$\vec{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}, \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

Tangenciálne zrýchlenie vyjadruje zmenu veľkosti rýchlosti a normálové zrýchlenie zmenu smeru rýchlosti.
Pri hodnotení krivočiarych pohybov často používame uhlové fyzikálne veličiny. Najprv popíšeme postup, ako priradíme uhlu vektor. Vektor uhla je kolmý na rovinu, v ktorej sa tento uhol vytvára. Jeho veľkosť (absolútna hodnota) sa rovná veľkosti tohto uhla. Vektor uhla je orientovaný tým smerom, odkiaľ sa jeho vytváranie javí proti smeru pohybu hodinových ručičiek (Obr.1.6): **Veľkosť**



Obr. 1.6

uhlovej dráhy je uhol, ktorý vytvára polohový vektor pohybujúceho sa bodu s nejakým pevne zvoleným smerom (napr. so smerom polohového vektora v momente počiatku merania času $t = 0$). **Vektor uhlovej rýchlosti** definujeme vzťahom:

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t},$$

kde $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ je vektor elementárneho uhla opísaného polohovým vektorom (sprievodičom) za elementárny časový interval $\mathrm{d}t$.
Pomocou takto zavedenej uhlovej rýchlosti možno definovať **uhlové zrýchlenie**:

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}$$

ako deriváciu vektora uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$ podľa času, alebo druhú deriváciu vektora uhlovej dráhy $\vec{\varphi}$ podľa času.
Pohyby rozdeľujeme spravidla podľa časovej závislosti veľkosti rýchlosti a podľa tvaru dráhy. Z hľadiska časovej zmeny veľkosti rýchlosti potom hovoríme o rovnomernom a nerovnomernom pohybe a z hľadiska tvaru dráhy o priamočiarom a krivočiarom pohybe.
V prípade pohybu v rovine, všetky tri vektory - $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ ležia na spoločnej priamke, ktorá je kolmá na rovinu pohybu a na popis pohybu potom stačia skalárne veličiny φ, ω, α, pre ktoré platí:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{dt},$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}.$$

1.2 Niektoré typy pohybov

1.2.1 Priamočiary pohyb

V prípade, že sa teleso pohybuje po priamke, napr. pozdĺž jednej súradnicovej osi, polohový vektor, vektory rýchlosti a zrýchlenia ležia v jednej priamke, hovoríme o **priamočiarom pohybe** a na popis takéhoto pohybu stačia dve skalárne rovnice:

$$v = \int a\,(t)\,\mathrm{d}t, \quad s = \int v\,(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde v je rýchlosť a s je poloha hmotného bodu v časovom okamihu t.
Ak je zrýchlenie telesa nulové, ide o **priamočiary rovnomerný pohyb** popísaný rovnicami:

$$v = v_0, \quad s = v_0 t + s_0.$$

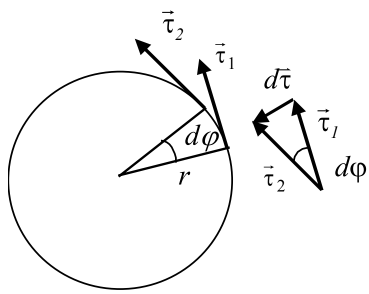
Ak je zrýchlenie hmotného bodu konštantné (a = konšt.), rovnice nadobudnú tvar:

$$v = at + v_0, \quad s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0,$$

kde v_0 je rýchlosť a s_0 dráha v čase $t = 0$.
V prípade, že vektor rýchlosti a zrýchlenia majú rovnakú (opačnú) orientáciu, hovoríme o **priamočiarom rovnomerne zrýchlenom (spomalenom) pohybe**.
Pri vertikálnom pohybe v gravitačnom poli ($a = g$), tieto pohyby nazývame voľný pád ($v_0 = 0$), vrh zvislý nadol ($\vec{v} \downarrow \vec{g} \downarrow$), vrh zvislý nahor ($\vec{v} \uparrow \vec{g} \downarrow$).

1.2.2 Pohyb po kružnici

Pohyb po kružnici je zvláštny prípad krivočiareho pohybu. Ide o rovinný pohyb, ktorého trajektória má tvar kružnice v danej rovine. Priamka vedená stredom tejto kružnice kolmo na jej rovinu sa nazýva **os otáčania (rotácie)**. Polohový vektor bodu vzhľadom na stred kružnice (sprievodič) má v tomto prípade konštantnú veľkosť, avšak jeho smer v rovine dráhy sa mení.
Ľahko môžeme ukázať, že polomer krivosti je totožný s polomerom kruhovej dráhy. Stačí si uvedomiť, že sprievodič a vektor $\vec{\tau}$ opíšu rovnaký uhol (Obr.1.7). Dĺžku úseku kružnice s, pri ktorom opíše sprievodič uhol φ, možno vyjadriť



Obr. 1.7

vzťahom: $s = r\varphi$, kde r je polomer kružnice. Pre elementárny úsek ds potom platí: d$s = r$dφ. Keďže vektory $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$ sú jednotkové vektory, pre veľkosť dτ = $|$d$\vec{\tau}|$ platí: d$\tau = |\vec{\tau}_1|$ dφ = dφ (Obr.1.7).
Elementárny úsek ds teda možno vyjadriť ako d$s = r$d$\varphi = r$dτ a pre polomer

kružnice platí vzťah $\frac{1}{r} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}$, ktorý je definičným vzťahom pre polomer krivosti. Pri pohybe po kružnici je teda polomer krivosti zhodný s polomerom kružnice. Ako bolo uvedené v predchádzajúcej časti, vektory $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ ležia na tej istej priamke, kolmej na rovinu pohybu, pretože pohyb po kružnici je pohyb v rovine, a teda vystačíme so skalárnym popisom, t. j:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}.$$

Keďže platí $\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\varphi$, ľahko možno nájsť súvis medzi veľkosťami obvodovej a uhlovej rýchlosti:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{r\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = r\omega.$$

Pre tangenciálne zrýchlenie potom platí:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\alpha.$$

Pre normálové zrýchlenie dostaneme:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2.$$

Periódu alebo dobu obehu T definujeme ako časový interval, ktorý hmotný bod potrebuje na jeden obeh pri danej uhlovej rýchlosti, t.j:

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Frekvencia $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ je počet otáčok za sekundu.
Ak je závislosť uhlového zrýchlenia od času známa, možno určiť závislosť uhlovej rýchlosti od času, pretože platí:

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \omega = \int \alpha\,(t)\,\mathrm{d}t.$$

Analogickým spôsobom možno zo známej závislosti uhlovej rýchlosti pohybujúceho sa telesa od času odvodiť závislosť uhlovej dráhy od času, pretože platí:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \varphi = \int \omega\,(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ak je uhlové zrýchlenie hmotného bodu konštantné, hovoríme o **rovnomerne zrýchlenom (spomalenom) pohybe po kružnici**. Pohyb možno popísať rovnicami:

$$\omega = \alpha t + \omega_0, \quad \varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0,$$

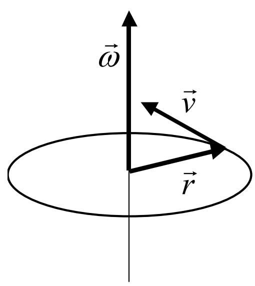
kde ω_0 a φ_0 sú uhlová rýchlosť a uhlová dráha v čase $t = 0$.
Ak je uhlové zrýchlenie nulové, teleso sa pohybuje po kružnici **rovnomerným pohybom**, pre ktorý platia rovnice:

$$\omega = \omega_0, \varphi = \omega_0 t + \varphi_0,$$

kde ω_0 a φ_0 sú uhlová rýchlosť a uhlová dráha v čase $t = 0$.
Keďže sa hmotný bod v tomto prípade pohybuje po kružnici konštantnou rýchlosťou, tangenciálne zrýchlenie je nulové, pretože $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. Na rozdiel od priamočiareho rovnomerného pohybu, pri rovnomernom pohybe po kružnici má hmotný bod nenulové celkové zrýchlenie, a to zrýchlenie normálové (dostredivé), ktoré charakterizuje zmenu smeru vektora rýchlosti.

Vektorový popis súvisu medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou a uhlovým zrýchlením

Napriek tomu, že pohyb po kružnici je rovinný pohyb, je niekedy užitočné použiť vektorový popis. Vzájomná orientácia príslušných vektorov je znázornená na Obr.1.8.



Obr. 1.8

Vektory $\vec{v}$, $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ sú na seba kolmé, ich vzájomný súvis možno vyjadriť vektorovým súčinom:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Použitím tohto vzťahu dostávame pre zrýchlenie:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \tfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \tfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\tfrac{d\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \\ &= \vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\Big(\vec{\omega}\times\vec{r}\Big)\,.\end{aligned}$$

Pre tangenciálnu a normálovú zložku zrýchlenia platí:

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha}\times\vec{r},$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right),$$

pretože vektor $\vec{\alpha}\times\vec{r}$ má smer vektora $\vec{v}$ a vektor $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ má opačný smer ako vektor $\vec{r}$.