10 Gravitačné pole

10.1 Newtonov gravitačný zákon

Zo skúsenosti vieme, že všetky telesá na zemskom povrchu sú priťahované k Zemi. Keby sme teleso v malej výške nad zemským povrchom nechali voľne bez podložky, spadne na zemský povrch, pričom sa pohybuje rovnomerne zrýchleným pohybom. Pôsobí naň teda konštantná sila od iného telesa - Zeme, a to bez vzájomného dotyku, v skutočnosti obe telesá pôsobia na seba navzájom bez toho, aby sa dotýkali. Silové účinky sa uskutočňujú tak, že navzájom interagujú polia. **Gravitačné pole** je oblasť priestoru, kde sa prejavuje silové pôsobenie telesa na iné teleso bez vzájomného dotyku a je bezprostredne späté s jednou zo základných vlastností častíc - s ich hmotnosťou. V okolí každého telesa (má svoju hmotnosť) existuje gravitačné pole, ktoré sa prejaví silovými účinkami na iný objekt s hmotnosťou. Gravitačné silové pôsobenie, alebo gravitačná interakcia, je jednou zo štyroch základných interakcií v prírode a je hybnou silou Vesmíru. Ďalšími interakciami sú elektromagnetická, silná a slabá. Gravitačná a elektromagnetická interakcia majú nekonečný dosah a v týchto prípadoch budeme hovoriť o poliach, silná a slabá interakcia sa prejavuje iba v rozmeroch atómových jadier.

Gravitačný zákon vyjadruje skutočnosť, že dva ľubovoľné objekty vo Vesmíre sa priťahujú silou, ktorá je priamo úmerná hmotnostiam týchto objektov a klesá so štvorcom vzdialenosti medzi nimi. História jeho objavu začína u našich dávnych predkov, ktorí pozorovali pohyb planét na oblohe. Na začiatku 15. storočia sa veľa diskutovalo o tom, či sa planéty ozaj pohybujú okolo Slnka, alebo je to pohyb okolo Zeme. Tycho de Brahe si uvedomil, že k poznaniu v tomto prípade sa dá prísť starostlivým dlhodobým pozorovaním a dostatočne presným meraním polôh planét na oblohe, aby sa ukázalo ako sa pohybujú. Na základe rozsiahlych tabuliek, ktoré Brahe pri svojich pozorovaniach vyhotovil, Kepler formuloval tri zákony planetárneho pohybu:

1. Planéty obiehajú okolo Slnka po eliptických dráhach (blízkych kružniciam), pričom Slnko sa nachádza v jednom ohnisku.

2. Plochy opísané sprievodičom (spojnica stredu planéty a stredu Slnka) počas rovnakých časových intervalov sú rovnaké.

3. Druhé mocniny dôb obehov ľubovoľných dvoch planét sú v takom istom pomere ako tretie mocniny veľkých poloosí ich obežných dráh:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Z týchto zákonov odvodil Newton gravitačný zákon. Mohlo by sa preto zdať, že Keplerove zákony sú všeobecnejšie, ale nie je to tak. Keplerove zákony vystihujú kinematiku pohybu planét a Newtonov gravitačný zákon ich dynamiku. Newtonov gravitačný zákon je všeobecný prírodný zákon a dá sa ukázať, že Keplerove zákony z neho vyplývajú spätne ako špeciálny prípad.
Odvodenie gravitačného zákona z Keplerových zákonov, za predpokladu eliptických dráh planét vyžaduje dlhší výpočet, preto si úlohu zjednodušíme. Budeme predpokladať kruhové dráhy, ktoré sú špeciálnym druhom elipsy a teda, ak sú Keplerove zákony (K.z.) správne, musia platiť aj pre takéto dráhy.
Z 1.K.z vyplýva, že Slnko leží v strede kruhovej dráhy.
Podľa 2.K.z. sprievodič opisuje za rovnaký čas rovnaké plochy, musí teda ísť o rovnomerný pohyb po kružnici, a platí:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

kde v je rýchlosť planéty, r polomer kružnice, T doba obehu planéty.
Pre dostredivé zrýchlenie planéty a v prípade rovnomerného pohybu po kružnici platí:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Z 3.K.z. vyplýva:

$$T^2 = Cr^3,$$

kde C je konštanta. Uvedený vzťah platí pre ktorúkoľvek planétu, preto C nemôže závisieť od vlastností planéty, ale len od vlastností Slnka.
Podľa II. Newtonovho zákona teda na planétu pôsobí sila:

$$F = ma = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} = m\frac{4\pi^2 r}{Cr^3} = \frac{4\pi^2}{C}\frac{m}{r^2} = k\frac{m}{r^2},$$

kde m je hmotnosť planéty a k je konštanta závislá len na vlastnostiach Slnka.
Ak posledný vzťah je všeobecným vyjadrením pôsobenia jedného telesa na druhé, musí naopak planéta pôsobiť na Slnko silou (jej veľkosť):

$$F' = k'\frac{M}{r^2},$$

kde M je hmotnosť Slnka a k' je konštanta závislá len od vlastností planéty.
Podľa princípu akcie a reakcie musí platiť:

$$F = F' \;\Rightarrow\; km = k'M \;\Rightarrow\; \frac{k}{M} = \frac{k'}{m} = \kappa$$

a teda

$$k = \kappa M, \quad k' = \kappa m.$$

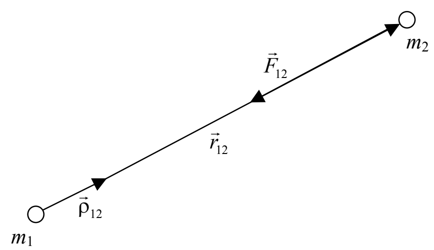
Pre veľkosť síl, ktorými na seba pôsobia Slnko a planéta, teda dostávame:

$$F = F' = \kappa \frac{mM}{r^2},$$

kde κ je gravitačná konštanta, jej hodnota je $\kappa = 6,67.10^{11} \mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$.
Pri odvodzovaní tohto vzťahu sme neuvažovali s konečnosťou rozmerov planéty a Slnka. Podľa Newtona je posledný vzťah vyjadrením sily, ktorou sa vzájomne priťahujú dva hmotné body.
Všeobecný Newtonov gravitačný zákon možno vyjadriť nasledovne:
Dva hmotné body s hmotnosťami m_1 a m_2, ktoré sa nachádzajú vo vzájomnej vzdialenosti r, pôsobia na seba príťažlivými silami, spadajúcimi do spojnice bodov, veľkosť ktorej je rovná:

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Vo vektorovom tvare (Obr. 10.1) bude platiť:



Obr. 10.1

$$\vec{F}_{12} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{\rho}_{12},$$

kde $\vec{F}_{12}$ je sila, ktorou pôsobí prvý hmotný bod na druhý, pričom $\vec{\rho}_{12}$ je jednotkový vektor v smere spojnice dvoch hmotných bodov, orientovaný od prvého k druhému, a

$$\vec{F}_{21} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \vec{\rho}_{21}$$

je sila, ktorou pôsobí druhý hmotný bod na prvý, pričom $\vec{\rho}_{21}$ je jednotkový vektor v smere spojnice orientovaný od druhého hmotného bodu k prvému.
Oba predchádzajúce vzťahy vyjadrujú Newtonov gravitačný zákon vo vektorovom tvare. Dva hmotné body teda na seba pôsobia gravitačnou silou, ktorej veľkosť je priamo úmerná ich hmotnostiam a nepriamo úmerná kvadrátu ich vzdialenosti. Táto sila je vždy príťažlivá.

10.2 Intenzita a potenciál gravitačného poľa

Intenzita gravitačného poľa vo vzdialenosti r od zdroja tohto poľa, ktorým je hmotný bod hmotnosti M, je rovná sile, ktorou gravitačné pole pôsobí v danom mieste na hmotný bod hmotnosti m, predelenou touto hmotnosťou:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} = -\kappa \frac{M}{r^3} \vec{r},$$

číselne sa rovná sile pôsobiacej na teleso jednotkovej hmotnosti. Jednotkou intenzity je ms^{-2}.
Ak vyjadríme silu pomocou intenzity, dostaneme:

$$\vec{F} = m\vec{E}.$$

Newtonov zákon sily hovorí:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Porovnaním oboch rovníc dostávame $\vec{E} = \vec{a}$, teda vektor intenzity gravitačného poľa sa rovná vektoru gravitačného zrýchlenia, ktoré telesu hmotnosti m udelí gravitačné pole v danom mieste. Keďže intenzita nezávisí od hmotnosti m, ani gravitačné zrýchlenie nebude závisieť od tejto hmotnosti, to znamená, že v danom mieste v gravitačnom poli sa budú všetky telesá pohybovať s rovnakým zrýchlením, bez ohľadu na svoju hmotnosť. Túto charakteristickú vlastnosť gravitačného poľa objavil už Galilei.
Ak je pole vytvorené N hmotnými bodmi, potom výsledná intenzita gravitačného poľa v danom mieste sa rovná vektorovému súčtu intenzít od jednotlivých zdrojov poľa:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = -\kappa \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{r_i^3} \vec{r}_i,$$

kde M_i je hmotnosť i-tého hmotného bodu a r_i je jeho vzdialenosť od miesta skúmania, vektor $\vec{r}_i$ je orientovaný od hmotného bodu do miesta skúmania.
Potenciál gravitačného poľa. Prírastok potenciálnej energie hmotného bodu

hmotnosti m pri prechode z miesta 1 do miesta 2 v gravitačnom poli hmotného bodu hmotnosti M dosiahneme vykonaním práce silou $\vec{F}'$, ktorá je rovnako veľká, ale opačne orientovaná ako gravitačná sila $\vec{F}$. Preto zmenu potenciálnej energie hmotného bodu v gravitačnom poli možno vypočítať:

$$\Delta E_p = \int_1^2 \vec{F}'.\mathrm{d}\vec{r} = -\int_1^2 \vec{F}.\mathrm{d}\vec{r} = \kappa Mm \int_1^2 \tfrac{\vec{r}.\mathrm{d}\vec{r}}{r^3} = \kappa Mm \int_{r_1}^{r_2} \tfrac{r.\mathrm{d}r}{r^2} =$$
$$= \kappa Mm \left[-\tfrac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = -\tfrac{\kappa Mm}{r_2} - \left(-\tfrac{\kappa Mm}{r_1}\right) = E_{p2} - E_{p1}.$$

Z výsledného vzťahu je zrejmé, že práca gravitačných síl závisí iba od polohy koncových bodov dráhy a nezávisí od tvaru dráhy, pozdĺž ktorej sily pôsobili. Gravitačná sila je sila konzervatívna a v poli gravitačnej sily platí zákon zachovania mechanickej energie.

Ak za vzťažné miesto zvolíme nekonečno ($r_1 \to \infty$), potom potenciálna energia v danom mieste sa rovná práci potrebnej na premiestnenie hmotného bodu s hmotnosťou m z nekonečna do daného miesta poľa vzdialeného o r od zdroja poľa:

$$E_p = -\frac{\kappa Mm}{r}.$$

Potenciál v tomto mieste poľa definujeme ako podiel potenciálnej energie a hmotnosti m:

$$\varphi = \frac{E_p}{m} = -\frac{\kappa M}{r}.$$

Jednotkou potenciálu je Jkg^{-1}.

Ak je pole vytvorené N hmotnými bodmi, potom výsledný potenciál gravitačného poľa v danom mieste sa rovná súčtu potenciálov od jednotlivých zdrojov poľa:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = -\kappa \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{r_i},$$

kde M_i je hmotnosť i-tého hmotného bodu a r_i je jeho vzdialenosť od miesta skúmania.

Potenciál nie je definovaný v mieste, kde leží hmotný bod, ktorý je zdrojom poľa, rastie so vzdialenosťou a svojej maximálnej hodnoty (rovnej 0) nadobúda pre $r \to \infty$.

Potenciál gravitačného poľa hmotného bodu v konečnej vzdialenosti r od neho je definovaný prácou vonkajších síl, ktoré prekonávajú prácu síl poľa pri premiestňovaní iného hmotného bodu (hmotnosti m) z nekonečna do miesta r, predelenou hmotnosťou m:

$$\varphi(r) = \frac{1}{m}\int\limits_{\infty}^{r} \vec{F}'.\mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_{\infty}^{r} \vec{E}'.\mathrm{d}\vec{r} = -\int\limits_{\infty}^{r} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{r}.$$

Pre elementárnu zmenu potenciálu môžeme písať:

$$\mathrm{d}\varphi = -\vec{E}.\mathrm{d}\vec{r}. \qquad (10.1)$$

Z tohto vzťahu napríklad vyplýva, že ak sa budeme pohybovať v gravitačnom poli po takej ploche, kde sa potenciál nemení (tzv. ekvipotenciálna plocha), intenzita bude kolmá na posunutie, teda intenzita je kolmá na ekvipotenciálnu plochu (pretože skalárny súčin dvoch vektorov je nulový ak sú tieto vektory na seba kolmé).

Súvis intenzity a potenciálu možno získať, ak rozpíšeme diferenciál dφ (potenciál je funkciou polohy, teda súradníc x, y, z):

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

Pravú stranu predchádzajúceho zápisu možno zapísať ako skalárny súčin dvoch vektorov:

$$\mathrm{d}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}\right) = \mathrm{grad}\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

Ak za dφ dosadíme do rovnice (10.1), dostaneme:

$$\mathrm{grad}\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

takže máme súvis intenzity a potenciálu gravitačného poľa v tvare:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi.$$

Ak poslednú rovnicu vynásobíme hmotnosťou m, dostaneme súvis medzi silou a potenciálnou energiou v konzervatívnom gravitačnom poli:

$$\vec{E}m = -\mathrm{grad}\,(m\varphi)$$

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}E_p.$$

Intenzita a potenciál sú základnými charakteristikami poľa.

10.3 Gravitačné pole Zeme

Na teleso hmotnosti m v gravitačnom poli Zeme pôsobí gravitačná sila. Jej veľkosť na povrchu Zeme je

$$F = \frac{\kappa m M}{R^2},$$

kde M je hmotnosť a R polomer Zeme.
Podľa Newtonovho zákona sily ale tiež platí:

$$F = m g_0.$$

Z porovnania týchto dvoch rovníc pre gravitačné zrýchlenie na zemskom povrchu vyplýva:

$$g_0 = \frac{\kappa M}{R^2}.$$

Vo výške h nad zemským povrchom bude gravitačné zrýchlenie

$$g_h = \frac{\kappa M}{(R+h)^2} = \frac{\kappa M}{(R+h)^2} . \frac{R^2}{R^2} = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 .$$

Teraz vypočítame prírastok potenciálnej energie hmotného bodu hmotnosti m pri jeho zdvihnutí zo zemského povrchu do výšky h nad povrchom:

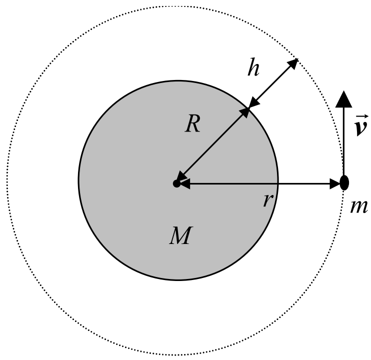
$$\begin{aligned} \Delta E_p &= -\tfrac{\kappa m M}{R+h} - \left(-\tfrac{\kappa m M}{R}\right) = \kappa m M \tfrac{-R+R+h}{R(R+h)} = \\ &= \kappa m M \tfrac{h}{R^2+Rh} = \tfrac{\kappa m M}{R^2} \tfrac{h}{1+\frac{h}{R}}. \end{aligned}$$

Tento výraz platí pre ľubovoľnú výšku. Ak ale platí $h << R$, potom $\frac{h}{R} << 1$ a pre prírastok potenciálnej energie dostávame:

$$\Delta E_p = \frac{\kappa M}{R^2} m h = m g_0 h,$$

čo je známy vzťah pre prírastok potenciálnej energie v zemskom gravitačnom poli pri premiestnení telesa zo zemského povrchu do nie veľmi veľkých výšok nad zemský povrch.

Pohyby v radiálnom gravitačnom poli. Najznámejšími príkladmi pohybov v radiálnom gravitačnom poli sú lety družíc a kozmických lodí.
a) **Pohyb družice.** Družica sa pohybuje okolo Zeme po dráhe tvaru kružnice. Jej rýchlosť závisí od polomeru kružnice. **Prvá kozmická rýchlosť** je minimálna počiatočná rýchlosť, ktorú treba družici udeliť pri vodorovnom vrhu z



Obr. 10.2

povrchu Zeme (pri zanedbaní odporu vzduchu), aby sa družica stala obežnicou Zeme.

Ak má družica hmotnosti m obiehať po kruhovej dráhe okolo Zeme rovnomerným pohybom vo výške h (Obr.10.2), dostredivou silou je sila gravitačná:

$$\frac{\kappa mM}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{R+h},$$

odkiaľ pre rýchlosť máme:

$$v^2 = \frac{\kappa M}{R^2}\frac{R^2}{R+h},$$

keď sme pravú stranu rovnice vynásobili jednotkou v tvare $\frac{R^2}{R^2}$ a teda:

$$v = R\left(\frac{g_0}{R+h}\right)^{\frac{1}{2}}$$

a ak $h = 0$, pre veľkosť prvej kozmickej rýchlosti dostávame:

$$v_I = \sqrt{Rg_0} = 7,912 \text{ kms}^{-1}.$$

b) **Úniková rýchlosť kozmickej lode z gravitačného poľa Zeme**. Ak teleso vystrelíme zo zemského povrchu kolmo nahor, minimálna počiatočná rýchlosť, ktorá mu umožní vymaniť sa zo zemského gravitačného poľa, sa nazýva **druhá**

kozmická rýchlosť.
Využijeme zákon zachovania mechanickej energie v izolovanej sústave tvorenej Zemou a vystreleným telesom. Rýchlosť telesa sa bude vplyvom zemskej gravitácie zmenšovať, aby ale úloha bola splnená, môže klesnúť na nulu až v nekonečne. Tam teda bude kinetická energia telesa nulová, v nekonečne je aj jeho potenciálna energia nulová (tak si ju môžeme zvoliť), takže celková mechanická energia je nulová. Potom zo zákona zachovania mechanickej energie vyplýva, že celková mechanická energia musí byť nulová aj v ľubovoľnom inom mieste, teda aj na povrchu Zeme v okamihu vystrelenia telesa:

$$E_p + E_k = 0$$

$$\frac{-\kappa m M}{R} + \frac{1}{2} m v^2 = 0.$$

Pre druhú kozmickú rýchlosť dostávame:

$$v^2 = \frac{2\kappa M}{R} = 2\frac{\kappa M}{R^2} R = 2 g_0 R,$$

keď sme pravú stranu rovnice vynásobili jednotkou v tvare $\frac{R}{R}$, a teda

$$v_{II} = \sqrt{2 g_0 R} = 11,2 \text{ kms}^{-1}.$$