4 Dynamika tuhého telesa

4.1 Pohybové rovnice a podmienky rovnováhy tuhého telesa

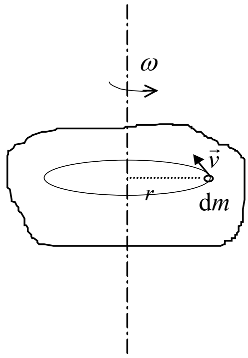
Dokonale tuhé teleso je špeciálnym prípadom sústavy hmotných bodov, v ktorej sa vzájomná vzdialenosť hmotných bodov nemení. Hmotné body sú tak blízko seba, že hmotnosť tuhého telesa považujeme za spojito rozloženú.
Pohybové rovnice (veta o pohybe ťažiska a veta o momente hybnosti), tak ako sme ich odvodili pre sústavu hmotných bodov, platia i v prípade tuhého telesa a spoločne úplne charakterizujú pohyb tuhého telesa. V prípade spojitého telesa je ale potrebné diskrétny súčet nahradiť spojitým, t.j. integráciou.
Matematické vyjadrenie vety o hybnosti a vety o momente hybnosti teda je:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}, \quad \vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}.$$

Keď je teleso v pokoji, rýchlosť a zrýchlenie jeho ťažiska sa rovnajú nule, takže podľa prvej rovnice aj súčet všetkých síl na teleso pôsobiacich sa rovná nule. Keď je teleso v pokoji, nule sa rovná aj jeho celkový moment hybnosti a teda aj jeho časová zmena. Z druhej rovnice potom plynie, že aj súčet momentov všetkých vonkajších síl na teleso pôsobiacich sa rovná nule a to vzhľadom na každý bod, lebo ak súčet vonkajších síl sa rovná nule, súčet ich momentov vzhľadom na každý bod je rovnaký.
Podmienkou **rovnováhy** tuhého telesa teda je aby vektorový súčet všetkých síl a vektorový súčet ich momentov vzhľadom na ľubovolný bod sa rovnali nule.
Ďalej sa budeme zaoberať otáčavým pohybom tuhého telesa. Budeme uvažovať otáčavý pohyb telesa v súradnicovej sústave, kde os otáčania nemení svoju polohu a budeme tento pohyb nazývať otáčaním okolo pevnej osi. Pri otáčavom pohybe telesa sa všetky jeho body pohybujú po kružniciach, pričom stredy týchto kružníc ležia na priamke, ktorá sa nazýva os otáčania. Kružnice ležia v rovinách kolmých na os otáčania. V danom časovom intervale opíšu všetky body rovnaký uhol a teda majú rovnakú uhlovú rýchlosť. (Pri posuvnom pohybe sa pohybujú všetky body telesa po priamkach a v danom časovom intervale prejdú rovnakú vzdialenosť - majú rovnakú rýchlosť).

4.2 Kinetická energia telesa rotujúceho okolo pevnej osi

Ak sa tuhé teleso otáča okolo pevnej osi, jeho ľubovoľný hmotnostný element dm sa pohybuje po kružnici polomeru r (Obr.4.1). Pre kinetickú energiu tohto elementu môžeme písať:



Obr. 4.1

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}v^2 dm,$$

kde v je rýchlosť elementu dm. Celková kinetická energia telesa pri otáčavom pohybe sa rovná súčtu kinetických energií všetkých jeho hmotnostných elementov, t.j.,

$$E_k = \int \mathrm{d}E_k = \int \frac{1}{2}v^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int v^2 \mathrm{d}m.$$

Ak využijeme súvis medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou $v = r\omega$, a uvedomíme si, že uhlová rýchlosť je rovnaká pre všetky elementy, dostaneme:

$$E_k = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}m\,(\omega r)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\omega^2 I.$$

Veličina definovaná integrálom

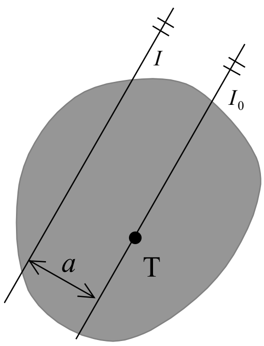
$$I = \int r^2 \mathrm{d}m$$

sa nazýva **moment zotrvačnosti**. V prípade otáčajúceho sa telesa je to moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania. Je mierou zotrvačných vlastností otáčajúceho sa telesa, podobne ako ňou je hmotnosť pri postupnom pohybe. Z definície je vidieť, že moment zotrvačnosti nezávisí iba od hmotnosti telesa, ale aj od jej rozloženia vzhľadom na os otáčania.

Ak teleso nie je upevnené a pôsobia naň vonkajšie sily, môže jeho ťažisko konať postupný pohyb a celé teleso môže konať aj otáčavý pohyb okolo osi prechádzajúcej ťažiskom.
V tomto prípade sa výsledná kinetická energia pohybujúceho sa telesa rovná súčtu kinetickej energie rotácie okolo osi prechádzajúcej ťažiskom a kinetickej energie postupného pohybu spojeného s pohybom ťažiska

$$E_k = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} m v_T^2.$$

Steinerova veta. Na výpočet momentu zotrvačnosti rôznych telies sa využíva



Obr. 4.2

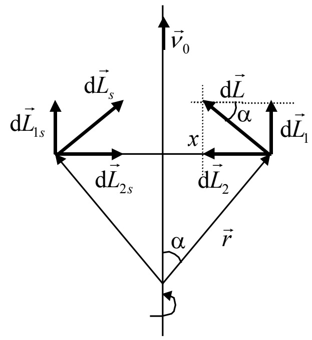
Steinerova veta, ktorá hovorí, že ak I je moment zotrvačnosti telesa hmotnosti m vzhľadom na ľubovoľnú os a I_0 je jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom a rovnobežnú s prvou osou, pričom vzdialenosť oboch osí je a (Obr.4.2), potom platí:

$$I = I_0 + m a^2.$$

4.3 Moment hybnosti, pohybová rovnica rotujúceho telesa

Budeme uvažovať symetrické teleso, ktoré sa otáča okolo osi symetrie. Príspevok do celkového momentu hybnosti od ľubovoľného elementu hmotnosti dm je

$$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{p} = \vec{r} \times \vec{v}\mathrm{d}m,$$



Obr. 4.3

kde $\vec{r}$ je jeho polohový vektor vzhľadom na ľubovoľný bod na osi a $\vec{v}$ je obvodová rýchlosť (Obr.4.3). Ku každému vybranému elementu existuje element s ním symetrický vzhľadom na os otáčania. Rozložme oba príspevky k celkovému momentu hybnosti od vybraného elementu a od elementu s ním symetrického na dve na seba kolmé zložky:$\mathrm{d}\vec{L}_1$, $\mathrm{d}\vec{L}_{s1}$ - zložky rovnobežné s osou otáčania a zložky kolmé na os: $\mathrm{d}\vec{L}_2, \mathrm{d}\vec{L}_{s2}$. Je vidieť, že kolmé zložky k celkovému momentu hybnosti neprispievajú, pretože sú rovnako veľké a opačne orientované.
Výsledný moment hybnosti sa bude rovnať súčtu zložiek rovnobežných s osou otáčania od všetkých elementov. Tým je určený aj jeho smer - bude ležať v osi otáčania (smer jednotkového vektora $\vec{\nu}_0$).

$$\vec{L} = L\vec{\nu}_0$$

$L = \int \mathrm{d}L_l$, kde $\mathrm{d}L_1 = \mathrm{d}L \sin\alpha$ a $\mathrm{d}L = |\vec{r} \times \vec{v}|\,\mathrm{d}m = rv\mathrm{d}m$, teda $\mathrm{d}L_1 = rv \sin\alpha \mathrm{d}m = vx\mathrm{d}m$, lebo z trojuholníka (Obr.4.3): $\frac{x}{r} = \sin\alpha$, keď x je kolmá vzdialenosť daného elementu od osi otáčania, teda jeho polomer otáčania.
Ak využijeme súvis obvodovej a uhlovej rýchlosti $v = x\omega$, máme

$$dL_1 = \omega x^2 \mathrm{d}m,$$

odkiaľ

$$L = \int dL_1 = \int \omega x^2 \mathrm{d}m = \omega \int x^2 \mathrm{d}m = \omega I$$

$$\vec{L} = I\omega\vec{\nu}_0 = I\vec{\omega}.$$

Moment hybnosti je mierou otáčavého pohybu telesa. Jeho veľkosť sa rovná súčinu momentu zotrvačnosti telesa a jeho uhlovej rýchlosti. Smer leží v osi otáčania.
Ak do vety o momente hybnosti dosadíme za moment hybnosti podľa posledného vzťahu, dostaneme **pohybovú rovnicu** pre otáčajúce sa teleso:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega} I) = I\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = I\vec{\alpha},$$

ktorá hovorí, že celkový moment síl vzhľadom na pevnú os pôsobiaci na teleso otáčajúce sa okolo tejto osi sa rovná súčinu jeho momentu zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania a uhlového zrýchlenia. Keďže v uvažovanom prípade symetrického rotujúceho telesa všetky uvedené vektory ležia v osi otáčania, môžeme používať aj skalárny tvar pohybovej rovnice:

$$M = I\alpha.$$

Vyššie uvedené vzťahy pre moment hybnosti a moment sily platia aj pre teleso nesymetrické vzhľadom na os otáčania, avšak len pre zložky momentu hybnosti a momentu sily ležiace v osi otáčania.

Kyvadlá

a) Fyzikálne kyvadlo je ľuboboľné teleso, ktoré sa vplyvom vlastnej tiaže (v gravitačnom poli Zeme) kýve okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej ťažiskom telesa (Obr.4.4) a preto ho možno riešiť použitím pohybovej rovnice pre otáčavý pohyb tuhého telesa:

$$I\vec{\alpha} = \vec{M}.$$

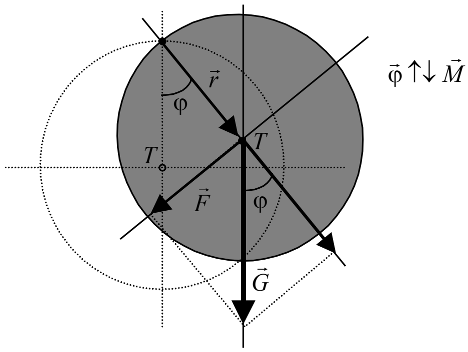
V prípade fyzikálneho kyvadla vektory $\vec{\alpha}$ a $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{G}$ ležia v osi otáčania, ale sú opačne orientované, preto skalárna pohybová rovnica má tvar:

$$I\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mgr\sin\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{mgr}{I}\sin\varphi,$$

v ktorej označíme $\frac{mgr}{I} = \omega^2$, kde ω^2 je kladná konštanta. Ak kmity kyvadla sú malé, s dostatočnosťou presnosťou platí, že $\sin\varphi = \varphi$, a rovnica nadobudne tvar:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\varphi.$$



Obr. 4.4

Je to diferenciálna rovnica druhého rádu bez pravej strany a jej riešením je funkcia typu:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \beta)\,,$$

kde φ_0 je maximálna výchylka, β je fázová konštanta a ω je uhlová frekvencia. Pre dobu kmitu fyzikálneho kyvadla potom dostávame:

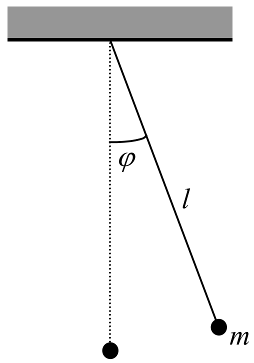
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}}.$$

b) Matematické kyvadlo je špeciálnym prípadom fyzikálneho kyvadla. Prakticky ho možno zrealizovať tak, že zavesíme guľôčku, ktorá predstavuje hmotný bod, na niť zanedbateľnej hmotnosti (Obr.4.5).
Pre moment zotrvačnosti matematického kyvadla platí:

$$I = ml^2,$$

kde m je hmotnosť guľôčky a l je dĺžka nite (tiež je $r = l$). Ak tento výraz dosadíme za moment zotrvačnosti do výrazu pre dobu kmitu fyzikálneho kyvadla, pre dobu kmitu matematického kyvadla dostaneme:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Obr. 4.5

4.4 Práca, výkon, veta o kinetickej energii

Nech M je moment sily pôsobiaci na teleso, ktoré sa môže otáčať okolo pevnej osi a nech $\mathrm{d}\varphi$ je elementárny uhol, o ktorý sa teleso otočilo počas elementárneho časového intervalu $\mathrm{d}t$. Súčin $M\mathrm{d}\varphi$ možno zapísať v tvare:

$$M\mathrm{d}\varphi = I\alpha\mathrm{d}\varphi = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}d\varphi = I\frac{d\varphi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\omega = I\omega\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right).$$

Výraz na pravej strane je elementárna zmena kinetickej energie, ku ktorej môže dôjsť vtedy, ak sa vykoná práca. Výraz na ľavej strane je teda elementárna práca vykonaná vonkajšími silami:

$$\mathrm{d}W = M\mathrm{d}\varphi.$$

Integráciou dostaneme vzťah pre celkovú **prácu** W vykonanú vonkajšími silami pri otočení telesa o uhol $\varphi_2 - \varphi_1$:

$$W = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\mathrm{d}\varphi.$$

Vetu o kinetickej energii v prípade otáčavého pohybu tuhého telesa okolo pevnej osi možno zapísať v tvare:

$$\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\mathrm{d}\omega$$

$$W = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2,$$

kde ω_1 a ω_2 sú uhlové rýchlosti otáčania tuhého telesa na počiatku a na konci pôsobenia momentu vonkajších síl M.
Výkon, ako práca vykonaná za jednotku času, je v prípade otáčavého pohybu tuhého telesa daný vzťahom:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{M\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = M\omega.$$