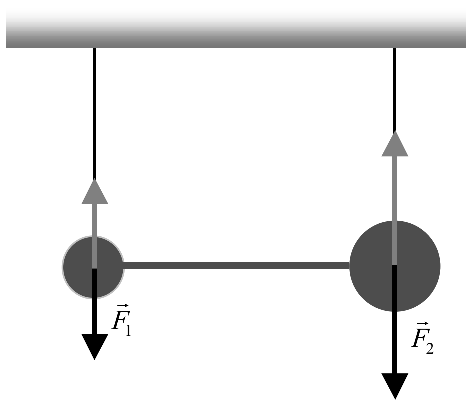
# 3 Dynamika sústavy hmotných bodov

## 3.1 Ťažisko sústavy hmotných bodov a telesa

Najjednoduchšou sústavou hmotných bodov sú dva hmotné body, ktorých hmotnosti označíme $m_1$ a $m_2$. Z praktických dôvodov je potrebné definovať podmienky, za ktorých je sústava hmotných bodov v pokoji. Keby sme mali napr. činku s ťažkými závažiami spojenými tyčou zanedbateľnej hmotnosti, závažia na seba pôsobia gravitačnou silou. Tieto sily sú silami akcie a reakcie. Činka je však kvôli tomu, že sú závažia prepojené tyčou, v pokoji. Výslednica vnútorných interakčných síl v sústave je nulová

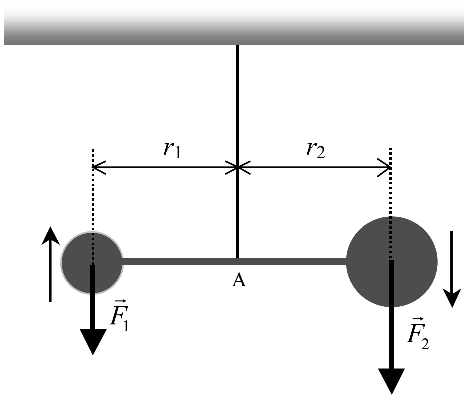
$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = 0.$$

Ak činku umiestnime do gravitačného poľa Zeme tak, aby sa nachádzala voľne




Obr. 3.1

v priestore nad zemským povrchom, účinkom gravitačnej sily sa začne pohybovať smerom nadol. Aby sme ju udržali v pokoji, je potrebné pôsobiť na obe závažia silou rovnako veľkou, ale opačne orientovanou. Môžeme to zrealizovať zavesením závaží na laná upevnené na konzole - gravitačná sila je kompenzovaná ťahom závesu (Obr.3.1). Sústava, teda činka, je v pokoji, ak výslednica všetkých vonkajších síl, ktoré na sústavu pôsobia, je nulová. Matematicky toto




Obr. 3.2

tvrdenie možno vyjadriť jednoduchou rovnicou:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0.$$

Činku je možné zavesiť aj v jednom bode A, ak lano upevníme na tyč (Obr.3.2). Keď to však prakticky skúsime, zistíme, že pri zavesení v strede tyče, závažia nezostanú v horizontálnej rovine, ale sa dajú do pohybu (Obr.3.3). Miera otáčavého účinku $M$ bude tým väčšia, čím je vzdialenosť miesta upevnenia od ťažšieho závažia $r_2$ väčšia a čím je závažie ťažšie a čím je vzdialenosť $r_1$ od ľahšieho závažia menšia a závažie ľahšie. Matematicky to možno vyjadriť rovnicou:

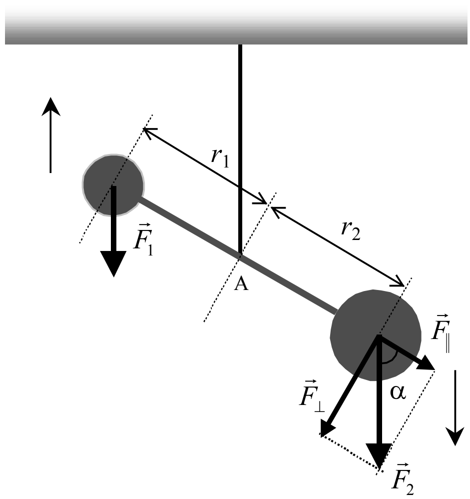
$$M = r_2F_2 - r_1F_1.$$

V prípade, že uhol medzi vektorom sily a polohovým vektorom jej pôsobiska vzhľadom na bod A je iný ako pravý (Obr.3.3), na otáčavý účinok má vplyv len tá zložka sily, ktorá je na polohový vektor kolmá, teda platí

$$M = rF_\perp = rF\sin\alpha.$$

Otáčavý účinok $M$ možno chápať ako vektorovú veličinu a poslednú rovnicu môžeme zapísať vo vektorom tvare:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$




Obr. 3.3

Veličinu $\vec{M}$ nazývame **moment sily**. Aby činka bola v gravitačnom poli v pokoji, musíme miesto závesu zvoliť tak, aby sa otáčavé účinky síl $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ kompenzovali, teda aby platilo: $\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$ ($M_1 = M_2$, teda $r_2F_2 = r_1F_1$). Všeobecne platí, že sústava je v pokoji, ak výslednica momentov všetkých síl je nulová:

$$\sum_i \vec{M}_i = 0.$$

Bod na tyči, kde treba činku upevniť, aby bola splnená táto podmienka, sa chová tak, ako keby v ňom bola sústredená celá hmotnosť sústavy a tento bod nazývame ťažiskom sústavy.

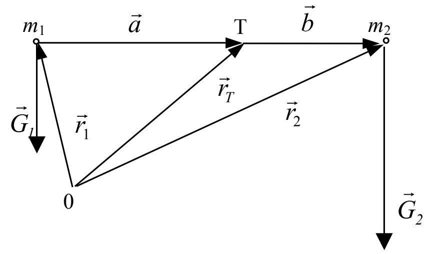
Pre veľkosti momentov tiažových síl sústavy dvoch bodov s hmotnosťami $m_1$ a $m_1$ vzhľadom na ťažisko (Obr.3.4) platí:

$$M_1 = m_1 g a \sin\frac{\pi}{2}$$

$$M_2 = m_2 g b \sin\frac{\pi}{2}$$

$$M_1 = M_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{m_2}{m_1} \quad \Rightarrow \quad a = b\frac{m_2}{m_1}$$

V zhode s označením na obrázku pre polohový vektor ťažiska dostaneme:




Obr. 3.4

$$\vec{r}_T = \vec{r}_1 + \vec{a} = \vec{r}_1 + \vec{b}\frac{m_2}{m_1} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_T)\,\frac{m_2}{m_1}$$

$$\vec{r}_T = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Analogicky možno definíciu polohového vektora ťažiska rozšíriť na $n$ bodov. V tomto prípade dostaneme:

$$\vec{r}_T = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i.$$

Túto definíciu môžeme ďalej rozšíriť na teleso so spojite rozloženou hmotnosťou tak, že sumáciu nahradíme integráciou:

$$\vec{r}_T = \frac{\int \vec{r}\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{1}{m}\int \vec{r}\mathrm{d}m,$$

kde integráciu treba urobiť cez celé teleso, pričom $\vec{r}$ je polohový vektor hmotnostného elementu d$m$ telesa. Ťažisko v tomto prípade možno chápať ako hmotný bod, ktorým sme sa zaoberali v predchádzajúcich častiach. A teda hmotným bodom, pokiaľ je tento hmotný bod ťažiskom, možno v niektorých prípadoch nahradiť teleso so spojito rozloženou hmotnosťou (napr. závažia činky sme chápali ako hmotné body).

## 3.2 Veta o hybnosti sústavy - veta o pohybe ťažiska

Predpokladajme, že na sústavu hmotných bodov budú pôsobiť vonkajšie sily, v súlade s druhým pohybovým zákonom pre $i$-tý hmotný bod platí $\vec{F}_i = m_i\vec{a}_i$, kde $\vec{F}_i$ je výslednica vonkajších síl pôsobiacich na $i$-tý hmotný bod. Výslednica všetkých síl pôsobiacich na sústavu potom bude

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i\vec{a}_i \tag{3.1}$$

pričom platí

$$\sum_i m_i\vec{a}_i = \sum_i m_i\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i m_i\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sum_i m_i\vec{r}_i.$$

Teda pre výslednicu síl platí vzťah

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sum_i m_i\vec{r}_i,$$

ktorý možno ďalej upraviť na tvar

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_T}{\mathrm{d}t^2} = m\vec{a}_T, \tag{3.2}$$

ak zoberieme do úvahy, že pre polohový vektor ťažiska možno písať $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i = m\vec{r}_T$.

Rovnica (3.2) hovorí, že vektorový súčet všetkých síl $\vec{F}$ pôsobiacich na sústavu sa rovná súčinu celkovej hmotnosti sústavy a zrýchlenia jej ťažiska, čo znamená, že ťažisko sústavy sa pohybuje ako častica hmotnosti $m$, na ktorú pôsobí výsledná sila $\vec{F}$. Kvôli tomu rovnicu (3.2) nazývame aj **veta o pohybe ťažiska.**

Ak pre hmotný bod využijeme definíciu hybnosti $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$, rovnicu (3.1) možno zapísať v tvare

$$\vec{F} = \sum_i m_i\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i m_i\vec{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{p}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},$$

kde $\vec{p}$ je celková hybnosť sústavy.

Posledná rovnica hovorí, že vektorový súčet všetkých síl $\vec{F}$ pôsobiacich na sústavu sa rovná derivácii celkovej hybnosti sústavy podľa času a nazýva sa **veta**

**o hybnosti sústavy** (iný tvar vety o pohybe ťažiska).
Ak je výslednica vonkajších síl $\vec{F}$ pôsobiacich na sústavu nulová, potom celková hybnosť sústavy častíc ostáva v čase konštantnou - nemení sa:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konšt.}.$$

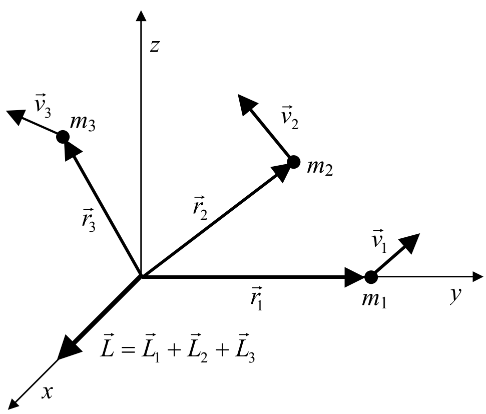
Táto rovnica je matematickým vyjadrením **zákona zachovania hybnosti pre sústavu častíc**. Sústava, na ktorú nepôsobí vonkajšia sila, sa nazýva izolovaná sústava a platí v nej zákon zachovania hybnosti.

## 3.3 Veta o momente hybnosti

Nech sa hmotný bod sústavy s hmotnosťou $m_i$ pohybuje rýchlosťou $\vec{v}_i$. Vzhľadom na nejaký vzťažný bod môžeme definovať ďalšiu veličinu moment hybnosti $\vec{L}_i$:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i,$$

kde $\vec{r}_i$ je polohový vektor hmotného bodu $m_i$. Ak sa napr. hmotné body sústavy pohybujú v rovine $yz$, momenty hybnosti vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy sú vektory spadajúce do smeru osi $x$ (Obr.3.5). Existuje súvis medzi




Obr. 3.5

momentom hybnosti a momentom sily, keďže platí:

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\vec{v}_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i) = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t},$$

pretože podľa pravidiel derivovania súčinu:

$$\begin{aligned}&\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i\right) = \tfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \times m_i\vec{v}_i + \vec{r}_i \times \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\vec{v}_i\right) = \\ &= \vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i + \vec{r}_i \times \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\vec{v}_i\right) = 0 + \vec{r}_i \times \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\vec{v}_i\right).\end{aligned}$$

Celkový moment hybnosti sústavy je daný rovnicou

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{L}_i$$

a pre vektorový súčet momentov síl pôsobiacich na celú sústavu dostávame:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{L}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}.$$

Posledná rovnica hovorí, že vektorový súčet všetkých momentov síl na sústavu pôsobiacich sa rovná derivácii celkového momentu hybnosti sústavy podľa času - **veta o momente hybnosti**. Táto veta platí pre ľubovoľný vzťažný bod a tiež ľubovoľný pohyb sústavy.

Ak je celkový moment síl $\vec{M}$ nulový, potom z predchádzajúcej rovnice dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konšt.},$$

čo je matematickým vyjadrením **zákona zachovania momentu hybnosti**: celkový moment hybnosti sústavy hmotných bodov, pre ktorú sa výsledný moment síl rovná nule, ostáva konštantný - nemení sa.