2 Dynamika hmotného bodu

2.1 Newtonove pohybové zákony

Dynamika hľadá odpoveď na otázku čo zapríčiňuje pohyb a aký bude pohyb, ak je známa jeho príčina. Príčina zmeny mechanického pohybu telies tkvie vo vzájomnom pôsobení telies alebo ich častí, pričom pôvod pôsobení môže byť rôzny. Vzájomné pôsobenie telies možno popísať pomocou jediného pojmu nazvaného **sila**.
Dynamika je založená na troch základných princípoch, ktoré vyslovil v r. 1678 Isaac Newton a ktoré sa nazývajú Newtonove pohybové zákony.

2.1.1 Prvý Newtonov zákon (zákon zotrvačnosti)

Teleso zotrváva v pokoji alebo rovnomernom priamočiarom pohybe, kým nie je nútené vonkajšími silami tento stav zmeniť.
Tento zákon nemožno priamo overiť, lebo nemožno vytvoriť také podmienky, aby na nejaké teleso nepôsobili iné materiálne objekty. Je výsledkom zovšeobecnenia pozorovaní potvrdzujúcich jeho správnosť. Relatívny pokoj mnohých telies okolo nás si vysvetľujeme ako výsledok vzájomnej kompenzácie rôznych silových účinkov pôsobiacich na dané teleso.
Vzhľadom na relatívnosť pohybového stavu, t.j. závislosť veličín charakterizujúcich pohybový stav (rýchlosť, zrýchlenie) na voľbe konkrétnej vzťažnej sústavy, vyššie uvedená formulácia I. Newtonovho zákona implicitne predpokladá existenciu sústavy či sústav, na ktoré je jej platnosť viazaná. Sú to sústavy, ktoré sú vzhľadom na seba v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe. Takéto sústavy budeme nazývať **inerciálnymi**.

2.1.2 Druhý Newtonov zákon (princíp sily

Ako vieme, pri rovnomernom priamočiarom pohybe je rýchlosť konštantným vektorom a zrýchlenie je nulové. Je teda prirodzené predpokladať, že pôsobením sily teleso získa určité zrýchlenie. Sila, podobne ako zrýchlenie, bude potom vektorovou veličinou. O súvise medzi silou a zrýchlením vyslovuje 2. Newtonov zákon nasledovné tvrdenie:
Zrýchlenie, ktoré určitá sila hmotnému bodu udeľuje, je priamo úmerné pôsobiacej sile a má smer pôsobiacej sily.
Ak budeme pôsobiť na rôzne telesá rovnakou silou, zistíme, že získajú spravidla rôzne zrýchlenia. Tieto telesá sa líšia ďalšou objektívnou vlastnosťou, ktorú nazývame **hmotnosť**. Skúsenosť ukazuje, že ak chceme dosiahnuť rovnaké zrých-

lenie u rôznych telies, musíme na telesá pôsobiť tým väčšou silou, čím je väčšia hmotnosť príslušného telesa. Súvis medzi silou, zrýchlením a hmotnosťou možno vyjadriť rovnicou:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

2. Newtonov pohybový zákon sa zvyčajne vyjadruje v tvare:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Sila $\vec{F}$ je priamo úmerná súčinu hmotnosti telesa m a zrýchlenia $\vec{a}$, ktoré táto sila vyvoláva.
V sústave SI máme pre mechaniku tri na sebe nezávislé základné jednotky: kilogram (kg) pre hmotnosť, meter (m) pre dĺžku a sekundu (s) pre čas. Jednotkou sily je 1 Newton. Je to taká sila, ktorá telesu o hmotnosti 1 kg udeľuje zrýchlenie 1 ms^{-2}.
Nech sa hmotný bod hmotnosti m pohybuje rýchlosťou $\vec{v}$. Definujeme **hybnosť** $\vec{p}$ hmotného bodu ako dynamickú mieru jeho pohybu:

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (\mathrm{kgms}^{-1}).$$

Zmenu charakteristiky pohybového stavu - hybnosti v čase možno vyjadriť nasledovne:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

V špeciálnom prípade, ak sa hmotnosť telesa v čase nemení, platí:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a},$$

ale všeobecne možno 2. Newtonov zákon napísať v tvare:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

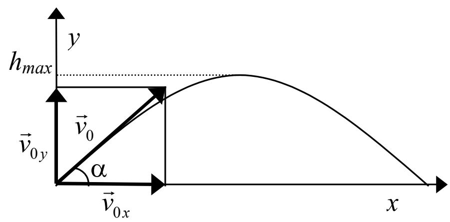
Zmena hybnosti hmotného bodu je priamo úmerná vonkajšej sile, ktorá na hmotný bod pôsobí. Toto vyjadrenie 2. Newtonovho pohybového zákona je najvšeobecnejšie - platí v nezmenenom tvare aj v špeciálnej teórii relativity.
Princíp zotrvačnosti potom možno formulovať nasledovne: hybnosť hmotného bodu, na ktorý nepôsobia žiadne vonkajšie sily, zostáva v čase nemenná, čo

možno matematicky vyjadriť rovnicou $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, t.j., $\vec{p} = \overrightarrow{\text{konšt.}}$. Princíp zotrvačnosti teda vyjadruje zákon zachovania hybnosti pre hmotný bod.
2. Newtonov zákon možno vyjadriť vektorovou rovnicou, z ktorej postupným prenásobením jednotkovými vektormi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ dostaneme tri skalárne rovnice:

$$ma_x = F_x, \quad ma_y = F_y, \quad ma_z = F_z.$$

Ak je známa vonkajšia sila, riešením týchto rovníc získame charakteristiky mechanického pohybu hmotného bodu - závislosť rýchlosti hmotného bodu od času a ďalším integrovaním závislosť polohy od času, preto 2. Newtonov zákon nazývame **pohybovou rovnicou**. A naopak, zo známeho priebehu polohy, prípadne rýchlosti, možno určiť vonkajšiu silu, ktorá pohyb zapríčinila.

Pohyb telesa v gravitačnom poli Zeme - šikmý vrh



Obr. 2.1

Nech je teleso vrhnuté počiatočnou rýchlosťou $\vec{v}_0$ pod uhlom α (Obr.2.1). Na teleso pôsobí tiažová sila $\vec{G} = -mg\vec{j}$ a pohyb sa deje v rovine xy. Súradnicovú sústavu zvolíme tak, že v časovom okamihu $t = 0$ je $x_0 = y_0 = 0$. Vektor počiatočnej rýchlosti možno vyjadriť ako vektorový súčet dvoch na seba kolmých zložiek:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j},$$

pričom

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \quad \text{a} \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$$

Pohybové rovnice potom nadobudnú tvar:

$$F_x = m\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad F_y = m\frac{dv_y}{dt} = -mg.$$

Z prvej rovnice dostaneme

$$\mathrm{d}v_x = 0, \quad v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$

a integrovaním druhej rovnice

$$\mathrm{d}v_y = -g\mathrm{d}t, \quad \int\limits_{v_{0y}}^{v_y} \mathrm{d}v_y = \int\limits_0^t -g\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

Získali sme závislosť zložiek rýchlosti telesa od času. Ďalším integrovaním získame závislosť súradníc od času:

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Ak z týchto dvoch rovníc vylúčime čas (vyjadríme ho z prvej rovnice a dosadíme do druhej), dostaneme matematické vyjadrenie krivky pohybu:

$$y = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2,$$

čo je rovnica paraboly.

2.1.3 Tretí Newtonov zákon (princíp akcie a reakcie)

Tento zákon umožňuje prechod od dynamiky jedného hmotného bodu k dynamike sústavy hmotných bodov a hovorí: **sily, ktorými na seba pôsobia dve telesá, sú rovnako veľké opačného smeru**.
Nech $\vec{F}_{12}$ je sila, ktorou pôsobí hmotný bod 1 na hmotný bod 2 a sila $\vec{F}_{21}$ je sila, ktorou pôsobí hmotný bod 2 na 1, potom platí:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.$$

Sily akcie a reakcie ležia na spoločnej priamke. Túto skutočnosť možno matematicky vyjadriť pomocou veličiny moment sily, ktorú zavedieme neskôr. **Sily akcie a reakcie pôsobia vždy na rôzne telesá, preto ich nemožno sčítať do výslednej sily a nemôžu sa navzájom rušiť.**

Poznámka
Keď na hmotný bod pôsobí súčasne niekoľko síl, potom sa výsledné zrýchlenie

hmotného bodu rovná vektorovému súčtu zrýchlení, ktoré by tomuto bodu udelili tieto sily samostatne.
Tento empirický poznatok vyjadruje tzv. princíp nezávislosti pôsobenia síl.
Platí:

$$\vec{a} = \sum \vec{a}_i = \sum \frac{\vec{F}_i}{m} = \frac{\sum \vec{F}_i}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \sum \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Je teda vidieť, že súčasné pôsobenie viacerých síl je rovnocenné s pôsobením jedinej sily, tzv. výslednice síl, ktorá sa rovná vektorovému súčtu jednotlivých síl.
Toto tvrdenie platí samozrejme aj naopak: danú silu môžeme rozložiť na sily, ktorých vektorový súčet sa rovná danej sile.

2.2 Časový a dráhový účinok sily

Aj keď sa väčšina problémov v dynamike dá riešiť pomocou Newtonových pohybových zákonov, pretože to sú najvšeobecnejšie zákony, v niektorých prípadoch je takéto riešenie dosť zdĺhavé. Na zjednodušenie riešenia boli z pohybových zákonov odvodené niektoré ďalšie súvislosti.
Pohybová rovnica

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

sa dá zapísať v tvare

$$m\mathrm{d}\vec{v} = \vec{F}\mathrm{d}t.$$

Integrujme túto rovnicu od okamihu $t = 0$, kedy sila začala pôsobiť na hmotný bod, ktorý mal v tomto okamihu rýchlosť $\vec{v}_0$, po okamih t, kedy má hmotný bod rýchlosť $\vec{v}$:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} m\mathrm{d}\vec{v} = \int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t,$$

z tejto rovnice dostaneme

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t.$$

Pravá strana tejto rovnice vyjadruje tzv. **časový účinok sily - impulz sily** $\vec{I} = \int_0^t \vec{F}dt$, takže predchádzajúcu rovnicu možno zapísať:

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{I}.$$

Zmena hybnosti spôsobená vonkajšou silou počas časového intervalu t je určená čo do veľkosti i smeru impulzom sily.
Videli sme, že účinok sily na pohyb hmotného bodu sa dal kvantitatívne posúdiť pomocou časového intervalu, počas ktorého sila na bod pôsobila, vychádzajúc z 2. pohybového zákona. Podobne, vychádzajúc z toho istého zákona, sa dá posúdiť účinok pôsobiacej sily pomocou dráhy, pozdĺž ktorej na hmotný bod pôsobí - tzv. dráhový účinok sily.
Pohybovú rovnicu v tvare

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

vynásobme skalárne elementárnym vektorovým posunutím $\mathrm{d}\vec{r}$:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{dt} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

Ľavá strana rovnice sa dá zapísať v tvare:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{dt} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = m\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = mv\mathrm{d}v$$

pretože platí $\mathrm{d}\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = 2\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v}$ a súčasne $\mathrm{d}\left(v^2\right) = 2v\mathrm{d}v$. Keďže $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$, potom je $\vec{v} \cdot d\vec{v} = vdv$.
Po dosadení dostaneme

$$mv\mathrm{d}v = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

Ak sila pôsobí na bod po dráhe, ktorej počiatočný bod je určený polohovým vektorom $\vec{r}_1$ a koncový bod polohovým vektorom $\vec{r}_2$, pričom veľkosť rýchlosti bodu v počiatočnom bode pôsobenia sily je v_1 a v koncovom bode je v_2, po integrovaní poslednej rovnice dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{2.1}$$

Výraz $\frac{1}{2}mv^2$ je kinetická energia E_k hmotného bodu hmotnosti m pohybujúceho sa rýchlosťou v. Na ľavej strane poslednej rovnice je rozdiel kinetických energií hmotného bodu na konci a na začiatku pôsobenia sily, ktorý vyjadruje výsledok pôsobenia sily po dráhe.
Výraz na pravej strane je definíciou **práce** W:

$$W = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_{0}^{s} \left|\vec{F}\right| \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \cos\alpha = \int\limits_{0}^{s} F\mathrm{d}s\cos\alpha,$$

kde α je uhol medzi vektormi $\vec{F}$ a $\mathrm{d}\vec{r}$. Ak sila $\vec{F}$, pôsobiaca na hmotný bod, má nenulovú zložku ($F\cos\alpha \neq 0$) spadajúcu do smeru posunutia $\mathrm{d}\vec{r}$, koná prácu. Práca je teda dráhovým účinkom sily.
Rovnica (2.1) sa nazýva aj **veta o kinetickej energii** a hovorí, že ak na hmotný bod pôsobí sila pozdĺž nejakej dráhy, táto sila vykoná prácu, ktorá sa prejaví v zmene kinetickej energie bodu.
Jednotka práce a kinetickej energie je rovnaká - joule: $1\mathrm{J} = 1\mathrm{kgm}^2\mathrm{s}^{-2}$.
Vo fyzike, ale aj v praktickom živote, nás často zaujíma nielen veľkosť vykonanej práce, ale tiež časový interval, za ktorý sa práca vykonala. Na charakterizovanie tejto skutočnosti používame veličinu nazývanú výkon.
Priemerný výkon definujeme vzťahom:

$$P_s = \frac{\Delta W}{\Delta t},$$

teda ako podiel celkovej práce ΔW vykonanej počas časového intervalu Δt a tohto časového intervalu.
Vo všeobecnosti práca nemusí byť vykonávaná rovnomerne v čase a je preto užitočné zaviesť tzv. **okamžitý výkon**:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t},$$

pričom $\mathrm{d}W$ je elementárna práca vykonaná za elementárny časový interval $\mathrm{d}t$.
Tento výraz možno upraviť nasledovne:

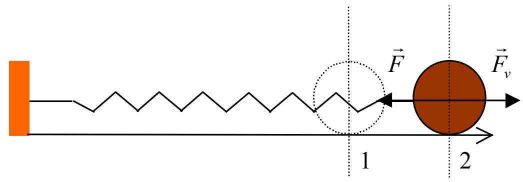
$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v}.$$

Okamžitý výkon teda možno vyjadriť skalárnym súčinom sily a rýchlosti, ktorou sa pôsobisko sily pohybuje.
Jednotkou výkonu v SI je watt ($1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{Js}^{-1} = 1\ \mathrm{kgm}^2\mathrm{s}^{-3}$).

2.3 Potenciálna energia, zákon zachovania mechanickej energie

2.3.1 Potenciálna energia

Z vety o kinetickej energii vyplýva, že ak sila pôsobí v smere pohybu hmotného bodu - jej práca je kladná, kinetická energia bodu vzrastie; ak sila pôsobí proti pohybu hmotného bodu - jej práca je záporná, kinetická energia bodu sa zmenší.



Obr. 2.2

Majme guľôčku - hmotný bod pripevnený na koniec pružiny a ťahom ruky ju premiestnime z polohy 1 do polohy 2 po dráhe s ako je to na Obr.2.2.
V oboch krajných polohách má guľôčka nulovú kinetickú energiu, takže napriek tomu, že sme vykonali prácu $W_v = \int_1^2 F_v \mathrm{d}s$, kinetická energia guľôčky sa nezmenila, guľôčka je v pokoji. To je možné v súlade s 1. pohybovým zákonom len tak, že existuje sila $\vec{F}$ (pružná sila pružiny), pre ktorú platí:

$$\vec{F}_v + \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{F}_v.$$

Nami vykonaná práca sa prejaví v tom, že sa guľôčka premiestni z polohy 1 do polohy 2 (pružina je natiahnutá). Keď ťah ruky postupne zmenšujeme, pružina vráti guľôčku do počiatočnej polohy 1. Teda napätá pružina (k jej napätiu bolo potrebné vykonať vonkajšiu prácu) má schopnosť konať prácu, čo sa prejaví pri premiestnení hmotného bodu z miesta 2 do miesta 1.
Celková práca síl pôsobiacich na hmotný bod je v tomto prípade nulová, ale prácou vonkajšej sily hmotný bod upevnený na pružine získal schopnosť konať prácu, teda má určitú formu energie, aj v prípade, že je v pokoji. Túto energiu nazývame **potenciálna energia**.
Potenciálnu energiu možno definovať len v poli **konzervatívnych síl**. Sila je konzervatívna, ak závisí iba od polohy a práca vykonaná touto silou závisí iba od počiatočného a koncového bodu dráhy, pozdĺž ktorej sila pôsobí na hmotný bod. Práca teda nezávisí od dĺžky a tvaru prejdenej dráhy. To znamená, že práca vykonaná pozdĺž uzavretej dráhy je nulová. Je treba si uvedomiť, že na rozdiel od kinetickej energie, potenciálna energia hmotného bodu závisí nielen od charakteristík hmotného bodu, ale aj od vlastností silového poľa (v tomto prípade pružiny). Preto sa pre potenciálnu energiu nedá určiť jediný konečný výraz ako pre kinetickú energiu.
Zmenu potenciálnej energie hmotného bodu pri jeho premiestnení z miesta

1 do miesta 2 v poli konzervatívnej sily $\vec{F}$ definujeme vzťahom:

$$\Delta E_p = W_v = \int\limits_1^2 \vec{F}_v \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int\limits_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

Podľa uvedenej definície predstavuje zmena potenciálnej energie prácu vonkajších síl potrebnú na premiestnenie telesa medzi danými dvoma polohami za neustálej rovnováhy vonkajšej sily a sily poľa. Môžeme však určiť len zmenu potenciálnej energie a ak chceme hovoriť o potenciálnej energii v danom mieste, musíme si zvoliť jej hodnotu v jednom bode. Inými slovami potenciálna energie je určená s presnosťou na ľubovoľnú aditívnu konštantu.
Pre elementárnu zmenu potenciálnej energie zrejme platí:

$$\mathrm{d}E_p = -\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

Ak poznáme potenciálnu energiu hmotného bodu v poli nejakej konzervatívnej sily, pomocou nasledovného súvisu môžeme určiť pôsobiacu silu:

$$\begin{aligned} -\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}E_p &= \tfrac{\partial E_p}{\partial x}\mathrm{d}x + \tfrac{\partial E_p}{\partial y}\mathrm{d}y + \tfrac{\partial E_p}{\partial z}\mathrm{d}z = \\ &= \left(\tfrac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \tfrac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \tfrac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}\right) = \\ &= \vec{\nabla} E_p \cdot \mathrm{d}\vec{r} = gradE_p \cdot \mathrm{d}\vec{r} \end{aligned}$$

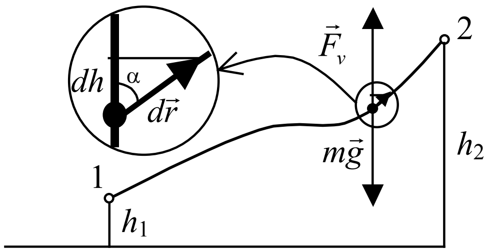
a teda

$$\vec{F} = -gradE_p.$$

Potenciálna energia telesa v malej výške v gravitačnom poli Zeme

Jedným z najznámejších prípadov poľa konzervatívnych síl je gravitačné pole. Vyjadríme zmenu potenciálnej energie telesa hmotnosti m pri jeho prenesení z miesta 1 vo výške h_1 nad zemským povrchom do miesta 2 vo výške h_2 nad zemským povrchom (Obr. 2.32.3). Obidve výšky sú oveľa menšie ako je polomer Zeme. Pri premiestnení telesa vykonajú vonkajšie sily prácu W_v, ktorá sa rovná nárastu potenciálnej energie telesa v gravitačnom poli:

$$\begin{aligned} W_v = \Delta E_p &= \int\limits_1^2 \vec{F}_v \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_1^2 \left|\vec{F}_v\right| |\mathrm{d}\vec{r}| \cos\alpha = \\ &= \int mg\mathrm{d}s \cos\alpha = \int\limits_{h_1}^{h_2} mg\mathrm{d}h = mgh_2 - mgh_1, \end{aligned}$$



Obr. 2.3

pretože platí

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha \Rightarrow \mathrm{d}s\cos\alpha = \mathrm{d}h.$$

Vykonaná práca a zmena potenciálnej energie nezávisí od tvaru ani dĺžky trajektórie, ale závisí iba od počiatočnej a konečnej polohy telesa v gravitačnom poli.
Pre potenciálnu energiu telesa hmotnosti m, ktoré je v nie veľkej výške h nad zemským povrchom, vzhľadom na povrch Zeme platí:

$$E_p = mgh.$$

2.3.2 Zákon zachovania mechanickej energie

Z definície potenciálnej energie pre prácu síl v konzervatívnom silovom poli a z vety o kinetickej energii môžeme písať:

$$-\Delta E_p = W, \quad \Delta E_k = W,$$

kde

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}, \quad \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$$

a z rovnosti pravých strán prvých dvoch rovníc dostaneme:

$$-\left(E_{p2} - E_{p1}\right) = E_{k2} - E_{k1},$$

alebo

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}.$$

Ak definujeme **celkovú mechanickú energiu** E telesa ako súčet kinetickej a potenciálnej energie

$$E = E_k + E_p,$$

potom z poslednej rovnice pre mechanickú energiu telesa v poli konzervatívnych síl platí:

$$E = E_k + E_p = \text{konšt.}.$$

Celková mechanická energia telesa, na ktoré pôsobia len konzervatívne sily, ostáva konštantná, teda celková mechanická energia v poli konzervatívnych síl sa zachováva. Tento výsledok sa nazýva **zákon zachovania mechanickej energie** pre konzervatívne sily. Je zvláštnym prípadom všeobecného zákona - **zákona zachovania energie**: celková energia izolovanej sústavy (všetky vonkajšie pôsobenia na ňu sú nulové) je konštantná, rôzne formy energie sa však vo vnútri sústavy môžu vzájomne meniť jedna na druhú. Zákon zachovania energie patrí medzi niekoľko základných najvšeobecnejších prírodných zákonov.

Zákon zachovania mechanickej energie v gravitačnom poli Zeme

a) Zvislý vrh nahor

Hmotný bod hmotnosti m bol vrhnutý zvisle nahor. Pohybuje sa rovnomerne spomaleným pohybom až do maximálnej výšky h_{max}, potom padá voľným pádom na zemský povrch. Pre ľubovoľné dva body, napr. bod 1 vo výške h_1 kde má hmotný bod rýchlosť v_1 a bod 2 vo výške h_2, s rýchlosťou hmotného bodu v_2, platí podľa zákona zachovania mechanickej energie hmotného bodu v gravitačnom poli Zeme:

$$E_1 = E_2$$

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2.$$

Pri pohybe nahor teda kinetická energia hmotného bodu klesá, pretože jeho rýchlosť sa zmenšuje až po maximálnu výšku, kde je rýchlosť a teda aj kinetická energia nulová, a súčasne potenciálna energia sa zväčšuje s rastúcou výškou až po maximálnu výšku, kde je potenciálna energia maximálna. Od tohto bodu padá voľným pádom, pričom s klesajúcou výškou klesá potenciálna energia až na nulu v bode dopadu a súčasne rastie s rýchlosťou aj kinetická energia až na svoju maximálnu hodnotu v bode dopadu.

Ak teda bodom 1 je maximálna výška h_{max} a bodom 2 je bod dopadu, kde rýchlosť má hodnotu v_{max}, zo zákona zachovania mechanickej energie máme:

$$0 + E_{p\,\max} = E_{k\,\max} + 0$$

$$mgh_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2.$$

b) Šikmý vrh

Pomocou zákona zachovania mechanickej energie hmotného bodu hmotnosti m vrhnutého šikmo nahor pod uhlom α v gravitačnom poli Zeme môžeme veľmi jednoducho získať hodnotu maximálnej výšky hmotného bodu pri tomto pohybe. Zapíšeme celkovú mechanickú energiu bodu v mieste dopadu (alebo vrhnutia), keď je potenciálna energia nulová (výška je nulová) a rýchlosť je rovná počiatočnej rýchlosti v_0 a v bode maximálnej výšky h_{max}, kedy rýchlosť hmotného bodu má iba x-ovú zložku v_x (y-ová zložka rýchlosti je v tomto mieste nulová) a dáme ich do rovnosti:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_x^2 + mgh_{\max},$$

celú rovnicu možno predeliť hmotnosťou m (maximálna výška nebude závisieť od hmotnosti) a po úprave dostaneme:

$$h_{\max} = \frac{1}{2g}\left(v_0^2 - v_x^2\right).$$

Po dosadení $v_x = v_0 \cos\alpha$ dostaneme pre maximálnu výšku vzťah:

$$h_{\max} = \frac{1}{2g}v_0^2\left(1 - \cos^2\alpha\right) = \frac{1}{2g}v_0^2 \sin^2\alpha.$$