7 Elektrostatické pole

V súčasnosti je používanie rôznych tlačiarni samozrejmosťou. Každý kto má počítač má aj tlačiareň. Z hľadiska elektrostatického poľa je zaujímavá atramentová tlačiareň. Aký fyzikálny princíp sa uplatňuje pri atramentovej tlačiarni? Ako sa dostane atrament na papier?

Základné pojmy:

elektrický náboj, bodový náboj, plošná a objemová hustota náboja, Coulombov zákon, intenzita elektrostatického poľa, potenciál, siločiary, ekvipotenciálne hladiny, elektrické napätie, tok vektora intenzity, kapacita vodiča, kapacita kondenzátora, energia elektrostatického poľa

Elektrostatické pole vzniká v okolí elektrického náboja, ktorý je v pokoji. Jeho prejavom je silové pôsobenie na iné elektricky nabité náboje a telesá. V tejto časti sa budeme zaoberať popisom elektrostatického poľa z hľadiska jeho veľkosti a tvaru. Zadefinujeme veličiny, ktoré umožňujú vypočítať silu elektrostatického poľa, určiť tok vektora intenzity pre rôzne prípady elektrostatického poľa, ako aj zistiť kapacitu a energiu elektrostatického poľa vodiča a kondenzátora.

Elektrický náboj *Q* je skalárna veličina, pomocou ktorej vieme charakterizovať elektrické vlastnosti telies, ktoré sa prejavujú silovými účinkami na iné elektricky nabité telesá. Rozoznáme dva druhy náboja - kladný a záporný.

Jednotkou elektrického náboja je Coulomb, (Q) = C.

Teleso je elektricky neutrálne, ak je v ňom v rovnováhe kladný a záporný náboj. *Teleso je elektricky nabité*, ak má prebytok náboja.

Pod pojmom **bodový náboj** budeme rozumieť teleso, ktorého rozmery na ktorých je rozložený náboj môžeme zanedbať vzhľadom na iné rozmery.

V prípade, že rozmery telesa nie sú zanedbateľné, uvažujeme, že je náboj rozložený na ploche telesa alebo v jeho objeme. **Plošná hustota náboja** je podiel elementárneho množstva náboja a elementárnej plochy, na ktorej je rozložený

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S} . \tag{7.1}$$

Objemová hustota náboja je podiel elementárneho množstva náboja a elementárneho objemu, v ktorom je rozložený

$$\rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} . \tag{7.2}$$

Elektrostatická sila, ktorou pôsobia na seba dva nabité náboje je definovaná **Coulombovym zákonom** v tvare

$$\vec{F}_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^3}\vec{r} , \tag{7.3}$$

kde q (Q) je náboj prvého (druhého) náboja, r je ich vzdialenosť, $\vec{r}$ je polohový vektor a ε_0 je permitivita vákua, $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ A^{2}s^{4}kg^{-1}m^{-3}.

Elektrostatická sila je vektorová veličina, ktorej smer závisí od hodnoty nábojov q a Q. Ak sú náboje rovnaké (dva kladné alebo dva záporné), tak sila má smer polohového vektora $\vec{r}$, je teda *odpudivá sila*. V prípade, že náboje majú opačné hodnoty, má sila opačný smer ako polohový vektor a je *príťažlivou silou.*

Veľkosť elektrostatickej sily je daná

$$F_{\mathrm{e}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\,. \tag{7.4}$$

Veľkosť elektrostatickej sily je priamoúmerná súčinu veľkosti nábojov, ktoré na seba navzájom pôsobia touto silou vo vákuu a nepriamoúmerná druhej mocnine ich vzájomnej vzdialenosti.

Na popis tvaru a veľkosti elektrostatického poľa je vhodne zaviesť **intenzitu** elektrostatického poľa, ktorá je definovaná ako podiel elektrostatickej sily $\vec{F}_{\mathrm{e}}$ a skúšobného náboja q

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\mathrm{e}}}{q}\,. \tag{7.5}$$

Jej jednotkou je volt na meter, (E) = V/m. Intenzita je vektorová veličina. V prípade, že zdrojom elektrostatického poľa bude jeden náboj bude intenzita tohto poľa daná

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r} \tag{7.6}$$

a pre jej veľkosť

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,. \tag{7.7}$$

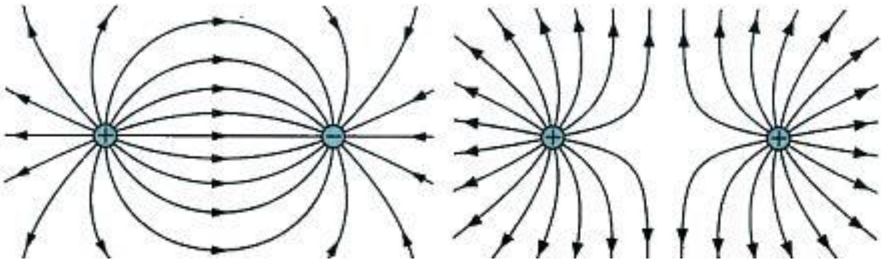
Ak pole je vytvorené sústavou n bodových nábojov sa výsledná intenzita poľa určí ako vektorový súčet intenzít od jednotlivých bodových nábojov

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i\,. \tag{7.8}$$

Intenzita elektrostatického poľa telesa, na ktorom je rozložený náboj sa vypočíta

$$\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r^3}\vec{r}\,. \tag{7.9}$$

Elektrostatické pole sa znázorňuje pomocou elektrických *siločiar*, pre ktoré platí: dotyčnica k siločiare určuje smer intenzity v danom bode, siločiary sa navzájom nepretínajú, siločiary majú začiatok na kladnom náboji a končia na zápornom náboji (obr. 7.1).



Obr. 7.1

Potenciálna energia bodového náboja q, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti r od bodového náboja Q, vzhľadom na nekonečno je

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}. \qquad (7.10)$$

Elektrostatické pole v okolí nabitých telies môže byť popísané aj pomocou skalárnej veličiny **potenciálu**, ktorý je definovaný ako podiel potenciálnej energie vo vzdialenosti r od zdroja poľa a skúšobného náboja q v tomto bode

$$\varphi = \frac{E_\mathrm{p}}{q}. \qquad (7.11)$$

Jednotkou potenciálu je volt, $(\varphi) = \mathrm{V}$.

Pre jeden bodový náboj je potenciál daný

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}. \qquad (7.12)$$

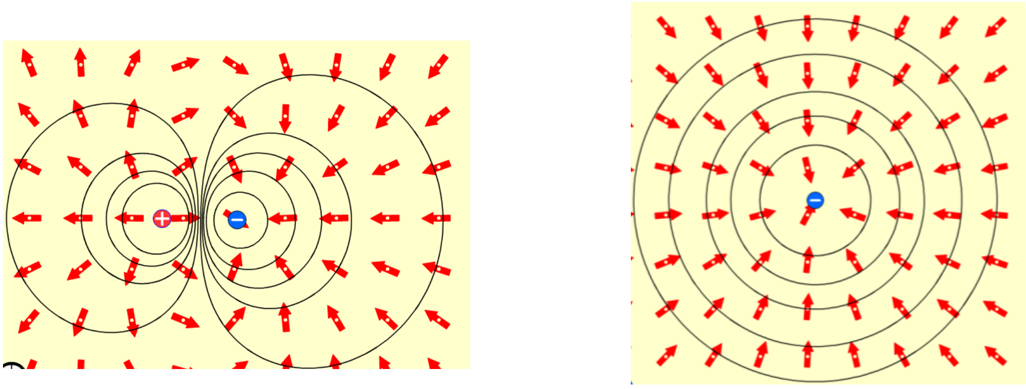
V prípade sústavy bodových nábojov sa potenciál určí ako súčet potenciálov od jednotlivých bodových nábojov

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i . \qquad (7.13)$$

Ak je zdrojom poľa teleso, na ktorom je rozložený náboj, potom potenciál tohto poľa

$$\varphi = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}Q}{r} \, . \qquad (7.14)$$

Ekvipotenciálne hladiny – množina bodov s rovnakým potenciálom, slúžia na znázornenie elektrostatického poľa. Platí, že ekvipotenciálne hladiny (znázornené čierne na obr. 7.2) sú kolmé na siločiary (znázornené červeno na obr.7.2).



Obr. 7.2

Medzi potenciálom a intenzitou existuje vzťah

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \, , \qquad (7.15)$$

z ktorého vyplýva, že intenzita je kolmá na ekvipotenciálne hladiny.

Elektrické napätie na istom úseku dráhy sa rovná rozdielu potenciálov medzi koncovými bodmi uvažovaného úseku dráhy

$$U = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \, . \qquad (7.16)$$

Napätie sa dá vyjadriť aj pomocou práce elektrostatických síl pri premiestnení jednotkového náboja z jedného bodu poľa do druhého bodu. V takomto prípade sa napätie číselne rovná práci týchto síl

$$U = \frac{W}{q} \, . \qquad (7.17)$$

Jednotkou napätia je volt, (U) = V.

Tok vektora intenzity cez Gaussovu plochu *S* je definovaný

$$T = \oint_S \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} \qquad (7.18)$$

kde $\mathrm{d}\vec{S}$ je vektor elementárnej plochy d*S*, pre ktorý platí, že je kolmý na zvolenú elementárnu plochu, smeruje von z tejto plochy a jeho veľkosť sa rovná veľkosti plochy d*S*.

Gaussova plocha je myslená, uzavretá a symetrická plocha, ktorú si v príkladoch volíme. Môže ňou byť guľa, valec alebo kocka.

Jednotkou toku vektora intenzity $(T) = \mathrm{N.m^2C^{-1}}$.

V súvislosti s tokom vektora intenzity sa zavádza **Gaussov zákon elektrostatiky**, podľa ktorého tok vektora intenzity cez ľubovoľnú uzavretú plochu je priamoúmerný náboju, ktorý sa nachádza v uzavretej ploche a nepriamoúmerný permitivite vákua

$$T = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \qquad (7.19)$$

Kapacita vodiča je definovaná ako podiel náboja na vodiči a potenciálu vodiča

$$C = \frac{Q}{\varphi}. \qquad (7.20)$$

Kapacita kondenzátora

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \qquad (7.21)$$

kde *Q* je náboj na jednej elektróde a *U* je napätie medzi oboma elektródami vodiča, φ_1 je potenciál na jednej elektróde a φ_2 je potenciál na druhej elektróde.

Jednotkou kapacity je farad $(C) = \mathrm{F}$.

Kondenzátor je sústava pozostávajúca z dvoch vodičov nabitých rovnakým nábojom opačného znamienka.

Kapacita doskového kondenzátora s plochou dosiek na ktorej sa prekrývajú S a vzdialenosťou dosiek d je

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} . \tag{7.22}$$

Pre výslednú **kapacitu sériového zapojenie** kondenzátorov

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{7.23}$$

a výslednú **kapacitu paralelného zapojenie** kondenzátorov

$$C = C_1 + C_2 . \tag{7.24}$$

Energia elektrického poľa nabitého **kondenzátora** je daná

$$E_\mathrm{e} = \frac{1}{2} C U^2 . \tag{7.25}$$

Energia elektrického poľa, ktorého objem je V a intenzita E je daná

$$E_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V . \tag{7.26}$$

○ Riešené príklady

Príklad 7.1 Akú hodnotu by musela mať gravitačná konštanta κ', aby vodíkový atóm mohol existovať na báze gravitačných účinkov?

(κ = 6,67.10^{-11} Nm^{2}kg^{-2}, m_e = 9,1.10^{-31} kg, m_p = 1,67.10^{-27} kg, e = 1,602. 10^{-19} C, ε_0 = 8,854.10^{-12} m^{-3}kg^{-1}s^{4}A^2)

m_e = 9,1.10^{-31} kg

m_p = 1,67.10^{-27} kg

ε_0 = 8,854.10^{-12} m^{-3}kg^{-1}s^{4}A^2

$e = p$ = 1,602.10^{-19} C

κ' = ?

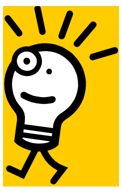
Riešenie:

Vodík pozostáva z jedného protónu (p) a jedného elektrónu (e), ktorých náboje sú rovnaké opačného znamienka (e = p). Náboje na seba pôsobia rovnako veľkými elektrickými silami, teda vodík je navonok neutrálny. Keďže protón a elektrón majú hmotnosť pôsobia na seba gravitačnými silami, ktoré sú v skutočnosti veľmi malé, preto sa ich pôsobenie zanedbáva. Zo zadania príkladu vyplýva, že máme vypočítať novú gravitačnú konštantu κ', pri ktorej musíme brať do úvahy aj gravitačné sily medzi protónom a elektrónom. Potom elektrostatické sily, ktorými na seba náboje pôsobia musia byť rovnaké ako gravitačné sily $F_e = F_g$ (1). Elektrostatickú silu vyjadríme pomocou vzťahu (7.4)

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\,p}{r^2} \quad (2)$$

a gravitačnú silu vyjadríme pomocou podobného vzťahu, v ktorom miesto nábojov budeme uvažovať ich hmotnosti

$$F_g = \kappa'\frac{m_e m_p}{r^2} \quad (3).$$



Pri vyjadrovaní gravitačnej sily, ktorou pôsobia na seba náboje sme použili Newtonov gravitačný zákon, ktorý popisuje túto silu v tvare

$$F_g = \kappa\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Dosadením (2) a (3) do podmienky (1)

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\,p}{r^2} = \kappa'\frac{m_e m_p}{r^2}$$.Úpravou tejto rovnice dostaneme

$$\kappa' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\,e}{m_e m_p} \quad (4)$$

Po číselnom dosadení do rovnice (4)

$$\kappa' = \frac{1}{4\pi 8{,}85.10^{-12}} \frac{(1{,}602.10^{-19})^2}{1{,}67.10^{-27}.9{,}1.10^{-31}} = 1{,}518.10^{29}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$$

Z porovnania novej gravitačnej konštanty so skutočnou gravitačnou konštantou

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{1{,}518.10^{29}}{6{,}67.10^{-11}} = 0{,}23.10^{40}$$

vyplýva, že gravitačná sila, ktorou pôsobia na seba náboje je veľmi malá, rádovo 10^{40}. Gravitačná sila je menšia ako elektrostatická sila medzi nábojmi. Preto sa gravitačná sila v skutočnosti zanedbáva.

Aby vodík existoval na báze gravitačných účinkov musela by byť nová hodnota gravitačnej konštanty $\kappa' = 1{,}548.10^{29}$ Nm^{2}kg^{-2}.

Príklad 7.2 Dva bodové náboje Q_1 = 8 μC, Q_2 = 3 μC sú umiestnené vo vákuu vo vzdialenosti 15 cm. V ktorom mieste na ich spojnici sú potenciály budené oboma nábojmi rovnaké? Aká bude v tomto mieste intenzita elektrostatického poľa prvého náboja?

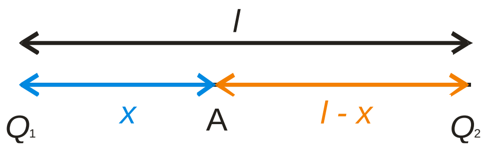
Q_1 = 8 μC

Q_2 = 3 μC

l = 15 cm = 0,15 m

$\varphi_1 = \varphi_2$ (1) ... x = ?

E_1 = ?



Obr. 7.3

Riešenie:

Zdrojom elektrostatického poľa sú bodové náboje, ktorých potenciál vieme popísať pomocou vzťahu (7.12). Vzdialenosť náboja Q_1 od bodu A, v ktorom budú potenciály rovnaké je x a vzdialenosť od náboja Q_2 je $l - x$. Potom pre prvý a druhý náboj je potenciál

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{(l-x)}$$

Ich dosadením do podmienky (1) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{(l-x)}$.Úpravou tejto rovnice dostaneme $Q_1 l = x(Q_1 + Q_2)$ a odtiaľ

$$x = \frac{Q_1 l}{(Q_1 + Q_2)}. \quad (2)$$

Po číselnom dosadení do rovnice (2) x = 0,109 m.

Pre vyjadrenie intenzity elektrostatického poľa od prvého náboja vo vzdialenosti x použijeme vzťah (7.7)

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x^2}$$

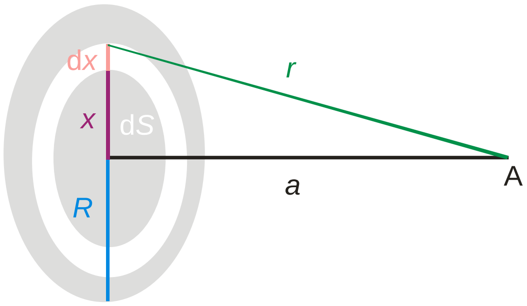
$$E_1 = \frac{1}{4\pi 8{,}8.10^{-12}}\frac{8.10^{-6}}{(0{,}0109)^2} = 6{,}05.10^6\ \mathrm{V/m}$$

Vo vzdialenosti 0,109 m bude potenciál elektrostatického poľa bodových nábojov rovnaký. Intenzita poľa od prvého náboja v tejto vzdialenosti bude 6,05.10^6 V/m.

Príklad 7.3 Vypočítajte potenciál a intenzitu elektrostatického poľa vytvoreného nábojom Q rovnomerne rozloženým na vodivej doske polomeru R na jej osi vo vzdialenosti a od jej stredu.

R, Q

E, φ = ? .... a



Obr.7.4

Riešenie:

Zdrojom elektrostatického poľa je kruhová doska o polomere R. Na určenie potenciálu tohto telesa použijeme vzťah

$\varphi = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}Q}{r}$ (1), v ktorom dQ predstavuje elementárne množstvo náboja rozloženého na elementárnej ploche dS. V tomto prípade elementárnu plochu predstavuje medzikružie šírky dx, ktorého plocha je dS = 2πxdx (2) (obr. 7.4). Na vyjadrenie elementárne množstvo náboja dQ použijeme vzťah (7.1) v tvare

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S} \quad (3),$$

v ktorom Q je náboj rozložený na povrchu kruhovej dosky $S = 4\pi R^2$ (4). Dosadením (2) a (4) do (3) a úpravou pre elementárny náboj

$$\mathrm{d}Q = \frac{Q}{\pi R^2} 2\pi x \mathrm{d}x \quad (5)$$

Dosadením (5) do vzťahu pre potenciál (1)

$$\varphi = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r\pi R^2} 2\pi x \mathrm{d}x \quad (6)$$

kde r predstavuje vzdialenosť elementárnej plochy od bodu A na osi kruhovej dosky, pre ktorú platí

$$r = \sqrt{x^2 + a^2}\ . \ (7)$$

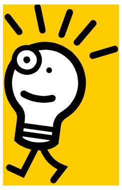
Dosadením (7) do (6) pre potenciál $\varphi = \int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\left(\sqrt{x^2 + a^2}\right)\pi R^2} 2\pi x \mathrm{d}x$, kde pri integrovaní sa posúvame plošným elementom od stredu dosky po jej kraj, integrujeme v hraniciach od 0 po R.

Výpočtom

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q2\pi}{\pi R^2}\int_0^R \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\left[\sqrt{x^2+a^2}\right]_0^R$$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\left(\sqrt{a^2+R^2}-a\right). \quad (8)$$

Na výpočet intenzity použijeme vzťah (7.15), podľa ktorého $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ (9).



Gradient – z ang. sklon, spád je operátor, ktorý keď aplikujeme na skalárnu veličinu, jeho výsledkom bude vektorová veličina. Označujeme ho grad alebo ∇ (nabla) a matematicky sa zapisuje ako súčet parciálnych derivácií násobených príslušnými jednotkovými vektormi $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ *(10).*

V tomto prípade je potenciál funkciou jednej premennej, vzdialenosti *a* bodu na osi od stredu kruhovej dosky, ostatne veličiny sú podľa (8) konštanty. Potom vzťah (9) prepíšeme pomocou (10)

$$\vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial a}\vec{a}_0$$

kde $\vec{a}_0$ je jednotkový vektor v smere osi kruhovej dosky. Potom

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\left(\sqrt{a^2+R^2}-a\right)\right)\vec{a}_0$$

výpočtom

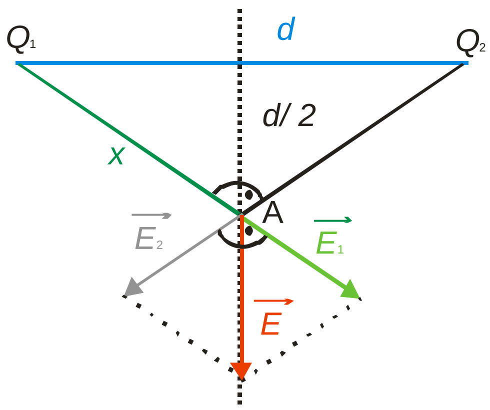
$$\vec{E} = \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)\right)\vec{a}_0 \quad (11)$$

Potenciál elektrostatického poľa kruhovej dosky na jej osi vo vzdialenosti *a* je daný vzťahom (8) a intenzita vzťahom (11).

Príklad 7.4 Dva rovnaké bodové náboje veľkosti 1 μC sú umiestnené vo vákuu vo vzdialenosti d = 1 m. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa na osi vo vzdialenosti $d/2$ od stredu.

$Q_1 = Q_2 = 1\ \mu C$
$d = 1$ m

$E = ?.....x = d/2$



Obr. 7.5

Riešenie:

Zdrojom elektrostatického poľa sú bodové náboje, ktoré sú vo vzdialenosti d. Zaujíma nás intenzita ich spoločného elektrostatického poľa na osi vo vzdialenosti $d/2$ od stredu, teda v bode A (obr.7.5). V tomto bode je intenzita od prvého náboja E_1 a od druhého náboja E_2. Majú rovnakú veľkosť, pretože veľkosť nábojov je rovnaká, ich smer je daný smerom spojnice nábojov a bodu A. V tomto prípade je zdrojom elektrostatického poľa sústava dvoch nábojov, ktorých intenzitu určíme ako vektorový súčet intenzít od jednotlivých nábojov $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, pričom pre jej veľkosť platí $E^2 = E_1^2 + E_2^2$ (1). Keďže náboje sú rovnako veľké a $E_1 = E_2$, potom vzťah (1) $E^2 = 2E_1^2$ (2), kde E_1 je intenzita od náboja Q_1, pre ktorú platí vzťah (7.7)

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x^2} \text{ (3).}$$

Označme vzdialenosť náboja Q_1 od bodu A x, pre ktorú platí

$$x^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{2} \text{ (4).}$$

Dosadením vzťahov (3) a (4) do (2)

$$E^2 = 2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q_1}{d^2}\right)^2.$$

Úpravou dostaneme

$$E = \sqrt{2}\,\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 d^2}$$

a po číselnom dosadení

$$E = \sqrt{2}\,\frac{10^{-6}}{2.3{,}14.8{,}854.10^{-12}1^2} = 2{,}54.10^4 \text{ V/m}$$

Intenzita elektrostatického poľa na osi nábojov vo vzdialenosti *d*/2 od stredu je 2,54.10⁴ V/m.

Príklad 7.5 Medzi vychyľovacie dosky atramentovej tlačiarne bola vstrieknutá kvapka atramentu hmotnosti $1{,}3.10^{-10}$ kg so záporným nábojom $1{,}5.10^{-13}$ C v smere osi x rýchlosťou 18 m/s. Dĺžka dosiek je 1,6 cm. Intenzita homogénneho elektrostatického poľa, ktoré je vytvorené medzi vychyľovacimi doskami je $1{,}4.10^{6}$ V/m. Aká je zvislá výchylka kvapky od pôvodného smeru pohybu na konci dosiek?

$m = 1{,}3.10^{-10}$ kg

$q = -1{,}5.10^{-13}$ C

$E = 1{,}4.10^{6}$ V/m

$v_x = 18$ m/s

$d = 1{,}6$ cm $= 0{,}016$ m

$y = ?$

Riešenie:

Medzi vychyľovacimi doskami atramentovej tlačiarne sa pohybuje v smere osi x kvapka atramentu so záporným nábojom (obr. 7.6). Intenzita elektrostatického poľa vytvoreného medzi vychyľovacimi doskami má záporný smer osi y. Na kvapku atramentu začne pôsobiť elektrostatická sila, ktorá má opačný smer ako intenzita poľa a spôsobí, že sa pohyb kvapky začne zakrivovať v kladnom smere osi y. Kvapka sa začne pohybovať zrýchlene.

Jej pohyb je zložený z dvoch pohybov. V smere osi x sa pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom (v tomto smere nepôsobí na ňu žiadna sila), ktorého dráha $x = v_x t$ (1). V smere osi y sa kvapka pohybuje rovnomerne zrýchleným priamočiarym pohybom, ktorého dráha $y = \frac{1}{2}at^2$ (2). Elektrostatickú silu, ktorá pôsobí na kvapku vyjadríme pomocou intenzity zo vzťahu (7.5) v tvare $F_e = qE$ (3). Pre elektrostatickú silu súčasne platí $F = ma$ (4).

Porovnaním vzťahov (3) a (4) pre zrýchlenie $a = \frac{qE}{m}$ (5).

Na výpočet zvislej výchylky (dráhy y) použijeme vzťah (2), do ktorého dosadíme za zrýchlenie vzťah (5)

$$y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 \quad (6)$$

Na vyjadrenie času vo vzťahu (6) použijeme vzťah (1), pričom predpokladáme, že

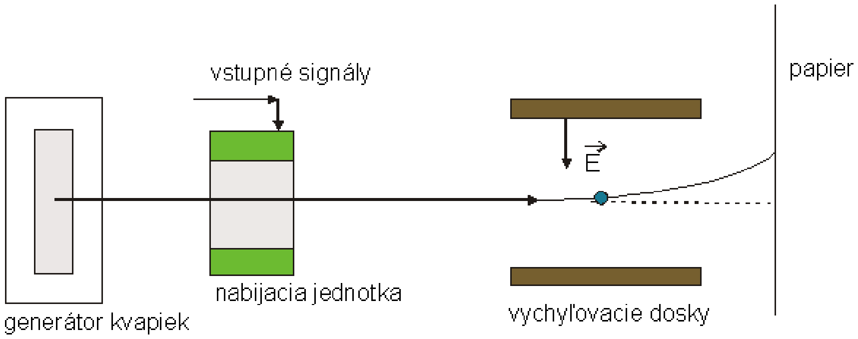
$d = x$, potom čas $t = \frac{d}{v_x}$ (7).

Dosadením (7) do (6)

$$y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\frac{d}{v_x}^2$$

a číselnom dosadení $y = \frac{1}{2}\frac{1{,}5.10^{-13}.1{,}4.10^{6}}{1{,}3.10^{-10}}\left(\frac{1{,}6.10^{-2}}{18}\right)^2 = 0{,}64.10^{-3}$ m

Pôsobenie elektrického poľa na nabitú časticu sa uplatňuje pri atramentovej tlačiarni, kde sa toto pôsobenie používa pri nastrekovaní atramentu na papier. Kvapka atramentu sa nabije na zápornú hodnotu v nabíjacej jednotke (obr. 7.6). Kvapka ďalej prechádza vychyľovacimi doskami tlačiarne, medzi ktorými je homogénne elektrické pole o intenzite E, ktorá smeruje nadol. Ako bolo vyššie spomenuté, na záporne nabitú kvapku atramentu pôsobí pole elektrostatickou silou, ktorá spôsobí jej vychýlenie smerom nahor.



Obr. 7.6

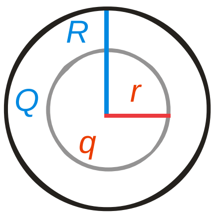
Kvapka potom dopadne na papier na miesto, ktoré závisí od veľkosti intenzity elektrického poľa E a náboja kvapky q. V praxi sa postupuje tak, že sa necháva intenzita poľa konštantná a polohu kvapky na papieri ovládame nábojom q, ktorý získa kvapka v nabíjacej jednotke, kým vletí do vychyľovacieho systému. Nabíjacia jednotka je riadená elektronickými signálmi z počítača, ktorými určujeme náboj pridávaný každej kvapke, a tým jej polohu na papieri kde dopadne.

Zvislá výchylka kvapky od pôvodného smeru pohybu na konci dosiek je 0,64 mm.

Príklad 7.6 V objeme gule s polomerom R je rovnomerne rozložený náboj Q s hustotou ρ. Vypočítajte intenzitu elektrostatického poľa gule vo vzdialenosti $r = R/2$ od stredu gule.

Q, R, ρ

$E = ?$ .... $r = R/2$



Obr. 7.7

Riešenie:

Pri výpočte intenzity môžeme použiť vzťah (7.9) alebo tok vektora intenzity, ktorý je daný vzťahom (7.18). V tomto príklade je vhodné použiť na výpočet tok vektora intenzity

$$T = \oint_S \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S}\,, \quad (1)$$

pretože nám tento postup zjednoduší výpočet. Aby sme mohli použiť vzťah (1) potrebujeme si zvoliť Gaussovu plochu S, určiť jej vektor a zistiť aká je intenzita na tejto ploche. Za Gaussovu plochu sa volí symetrická plocha. Teraz je výhodne za ňu zvoliť povrch gule o polomere $r = R/2$. Vektor plochy $\mathrm{d}\vec{S}$ je vektor kolmý na túto plochu a pre vektor intenzity zo vzťahu (7.6) platí, že intenzita je rovnaká v rovnakej vzdialenosti r od zdroja poľa a má smer polohového vektora $\vec{r}$. V prípade zvolenej Gaussovej plochy je intenzita rovnaká v každom bode tejto plochy (povrchu gule) a je kolmá na túto plochu (obr.7.7). Potom $\vec{E} \parallel \mathrm{d}\vec{S}$ ($\alpha = 0$ °) a pre vzťah (1)

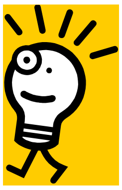
$$T = \oint_S E \mathrm{d}S \cos\alpha = \oint_S E \mathrm{d}S \cos 0^0 = E \oint_S \mathrm{d}S = ES \quad (2)$$

Náboj, ktorý Gaussova plocha obopína je Q_0 a jej objem V_0. Potom použitím vzťahu $T = \dfrac{Q_0}{\varepsilon_0}$ a (2), ktoré dáme do rovnosti pre intenzitu

$$E = \frac{Q_0}{S\varepsilon_0}, \quad (3)$$

kde S je povrch Gaussovej plochy $S = 4\pi r^2$ (4) a náboj Q_0 vyjadríme z hustoty ρ gule

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q_0}{V_0}, \text{ odkiaľ } Q_0 = \frac{Q}{8} \ (5).$$



Pri vyjadrení vzťahu (5) sme využili, že $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ *je objem gule, ktorá je zdrojom elektrostatického poľa a* $V_0 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^3$ *je objem Gaussovej plochy.*

Dosadením (4) a (5) do (3) pre intenzitu

$$E = \frac{Q}{8\pi R^2 \varepsilon_0} \quad (6)$$

Intenzita elektrostatického poľa gule vo vzdialenosti $r = R/2$ od stredu gule je daná vzťahom (6).

Príklad 7.7 Vypočítajte kapacitu guľového kondenzátora vytvoreného dvoma sústrednými guľovými vodivými plochami s polomermi $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 5$ cm, keď medzi nimi je vákuum.

$r_1 = 3$ cm

$\underline{r_2 = 5\text{cm}}$

$C = ?$

Riešenie:

Pri výpočte kapacity guľového kondenzátora použijeme definičný vzťah pre kapacitu kondenzátora (7.21)

$$C = \frac{Q}{U}, \quad (1)$$

v ktorom Q predstavuje náboj na jednej z elektród a U je napätie medzi oboma elektródami, ktoré vypočítame podľa vzťahu $U = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2$ (2). Intenzita E vo vzťahu (2) je intenzitou na zvolenej Gaussovej ploche, ktorou je povrch guľovej plochy, ktorá sa nachádza medzi elektródami kondenzátora a jej polomer je r. Pre túto intenzitu platí, že na zvolenej Gaussovej ploche má rovnakú veľkosť danú vzťahom $E = \frac{Q}{S\varepsilon_0}$, ktorý sme si vyjadrili v príklade 9.6. Povrch Gaussovej plochy je $S = 4\pi r^2$. Potom intenzita elektrostatického poľa medzi elektródami kondenzátora závisí od vzdialenosti r

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad (3)$$

a pre jej smer platí, že je kolmá na povrch Gaussovej plochy. Intenzita má smer elementárneho posunutia $\mathrm{d}\vec{r}$, potom uhol medzi intenzitou a elementárnym posunutím je $\alpha = 0°$. Vo vzťahu (2) pre skalárny súčin vektorov $\vec{E}$ a $\mathrm{d}\vec{r}$

$$U = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} E\mathrm{d}r \cos\alpha = \int_{r_1}^{r_2} E\mathrm{d}r \,. \quad (4)$$

Dosadením (3) do (4) a riešením

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right) \quad (5)$$

Potom kapacitu guľového kondenzátora dostaneme dosadením (5) do (1)

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} = \frac{4.3{,}14.8{,}85.10^{-12}.0{,}05.0{,}03}{0{,}05 - 0{,}03} = 8{,}34.10^{-12}\,\mathrm{F}$$

Kapacita guľového kondenzátora je $8{,}34.10^{-12}$ F.

Príklad 7.8 Dva kondenzátory prvý s kapacitou 1 μF a druhý s plošným obsahom dosiek 10^{-4} cm^2 a vzdialenosťou medzi nimi $8{,}859.10^{-10}$ m, sú zapojené do série. Koľkonásobne narastie energia ich elektrostatického poľa, ak ich zapojíme paralelne? Predpokladáme, že kondenzátory sú zapojené na rovnaké napätie v obidvoch prípadoch.

C_1 = 1 μF

$S = 10^{-4}$ cm^2

$d = 8{,}859.10^{-10}$ m

E_{e2} / E_{e1} = ?

Riešenie:

Energiu spoločného elektrostatického poľa kondenzátorov v prípade, keď sú zapojené do série vyjadríme vzťahom

$E_{e1} = \frac{1}{2} C_S U^2$ (1)

a energiu elektrostatického poľa kondenzátorov v prípade, keď sú zapojené paralelne

$E_{e2} = \frac{1}{2} C_P U^2$. (2)

Výslednú kapacitu pri sériovom zapojení dostaneme úpravou vzťahu $\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

potom $C_S = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ (3) a pri paralelnom $C_P = C_1 + C_2$ (4).

Dosadením vzťahov (1) a (2) do podielu energii $\frac{E_{e2}}{E_{e1}} = \frac{\frac{1}{2} C_P U^2}{\frac{1}{2} C_S U^2}$ a dosadením za kapacity vzťahy (3) a (4)

$$\frac{E_{e2}}{E_{e1}} = \frac{\frac{1}{2}(C_1+C_2)U^2}{\frac{1}{2}\frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}U^2} = \frac{(C_1+C_2)^2}{C_1 C_2} = \frac{(C_1+\frac{\varepsilon_0 S}{d})^2}{C_1 \frac{\varepsilon_0 S}{d}} \quad (5)$$

v ktorom sme za kapacitu druhého kondenzátora dosadili vzťah $C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$. Po dosadení číselných hodnôt do (5) dostávame

$$\frac{E_{e2}}{E_{e1}} = 4$$

Pri zapojení kondenzátorov, ktoré boli predtým zapojené do série, ich energia spoločného elektrostatického poľa vzrastie 4 – násobne.

○ Úlohy

7.1 Aké veľké náboje treba umiestniť na dve rovnaké guľôčky s hmotnosťami 10 g, aby elektrostatické sily, ktorými budú navzájom pôsobiť, kompenzovali gravitačné sily, ktorými guľôčky na seba pôsobia?

[Q = 0,861.10^{-12} C]

Ak neviete ako na to, pomôžte si príkladom 7.1.

7.2 Vo vzdialenosti 30 cm od seba sú uložené dva kladné náboje Q a 4Q. Kde na spojnici medzi oboma nábojmi treba umiestniť tretí náboj Q', aby naň nepôsobila nijaká sila?

[x = 10 cm]

7.3 Aká je intenzita elektrostatického poľa v bode, ktorý leží uprostred medzi dvoma nábojmi Q_1 = 70 μC a Q_2 = 50 μC, ktoré sú od seba vzdialené 20 cm? Náboje sú v petroleji ($\varepsilon = 2\varepsilon_0$).

[E = 8,99 MV/m]

7.4 V akej vzdialenosti x od náboja Q_1 = 6.10^{-6} C na spojnici s nábojom Q_2 = 2.10^{-6} C je výsledná intenzita elektrostatického poľa nulová, keď vzájomná vzdialenosť nábojov je 1 m.

[x = 0,63 m]

V úlohách 7.3, 7.4 postupujte podobne ako v príklade 7.4.

7.5 Na vodiči v tvare kružnice polomeru *R* je uložený náboj *Q*. Vypočítajte intenzitu a potenciál elektrostatického poľa vytvoreného týmto nábojom na osi tejto kružnice vo vzdialenosti *a* od jej stredu.

$$[\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\left(R^2+a^2\right)}},\ \vec{E} = \frac{Qa}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{R^2+a^2}\right)^3}\vec{a}_0\ ]$$

7.6 Na vodiči ohnutom do tvaru kružnice polomeru *R* je uložený náboj *Q*. Vypočítajte potenciál a intenzitu elektrostatického poľa vytvoreného týmto nábojom v strede kružnice, do ktorej je vodič ohnutý ako aj v bode ležiacom na osi tejto kružnice vo vzdialenosti *R* od jej stredu.

$$[\varphi_\mathrm{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R},\ E_\mathrm{S} = 0, \varphi_\mathrm{R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}R}, E_\mathrm{R} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{2}R^2}\ ]$$

Príklad 7.3 vám môže pri výpočte pomôcť.

7.7 Aký veľký je potenciál elektrostatického poľa vo vzdialenosti 10 cm od povrchu vodivej gule polomeru 5 cm, keď je na nej nahromadený elektrický náboj 2.10^{-7} C?

[φ = 11990 V]

7.8 Z vodivej mydlovej bubliny polomeru 2 cm nabitej na potenciál $\varphi_1 = 10^4$ V vznikne po prasknutí kvapka vody polomeru 0,05 cm. Aký veľký je potenciál kvapky?

[φ = 400 kV]

Inšpirujte sa príkladom 7.2 a uvedomte si, čo platí pre náboj novej kvapky vzhľadom na pôvodnú kvapku.

7.9 Vypočítajte intenzitu a potenciál elektrostatického poľa vo vzdialenosti *d* od nekonečne veľkej vodivej roviny s rovnomerne rozloženým elektrickým nábojom, ktorého plošná hustota je σ.

$$[\ E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}d\ ]$$

7.10 Dve rovnobežné dosky sú umiestnené blízko seba, každá z nich má na jednej stene rozložený rovnomerne náboj. Plošné hustoty nábojov sú $\sigma^+ = 6{,}8.10^{-6}\ \mu\mathrm{C/m^2}$ pre kladne nabitú dosku a $\sigma^- = -4{,}3.10^{-6}\ \mu\mathrm{C/m^2}$ pre záporne nabitú dosku. Vyjadrite intenzitu elektrostatického poľa a) vľavo od dosiek, b) medzi doskami, c) vpravo od dosiek. d) Aká by bola intenzita elektrostatického poľa v tých istých polohách, ak by bola plošná hustota oboch dosiek rovnaká a rovná $\sigma^+ = 6{,}8.10^{-6}\ \mu\mathrm{C/m^2}$.

[a) $E_\text{ľ} = 1{,}41.10^5$ V/m, b) $E_\mathrm{m} = 6{,}27.10^5$ V/m, c) $E_\mathrm{p} = 1{,}41.10^5$ V/m, d) $E_\text{ľ} = E_\mathrm{p} = 0$ V/m,
$E_\mathrm{m} = 7{,}68.10^5$ V/m]

7.11 Dve kolmé dosky sú umiestnené blízko seba, každá z nich má na jednej stene rozložený rovnomerne náboj. Plošné hustoty nábojov sú $\sigma^+ = 6{,}8.10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$ pre kladne nabitú dosku a $\sigma^- = -4{,}3.10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$ pre záporne nabitú dosku. Vyjadrite intenzitu ich spoločného elektrostatického poľa.

[$E = 4{,}5.10^5$ V/m]

7.12 Povrch nekonečne dlhého valca, nachádzajúceho sa vo vákuu je homogénne nabitý elektrický nábojom tak, že na jeho jednotkovú dĺžku pripadá náboj q. Vypočítajte intenzitu elektrostatického poľa vo vzdialenosti r od osi valca, keď jeho polomer je R.

[pre $r = R$ $E = \dfrac{q}{2\pi R\varepsilon_0}$, pre $r < R$ $E = 0$, pre $r > R$ $E = \dfrac{Q}{2\pi r\varepsilon_0} l = \dfrac{q}{2\pi r\varepsilon_0}$]

V týchto úlohách si pomôžte príkladom 7.6 a za Gaussovu plochu si zvoľte valec.

7.13 Vypočítajte kapacitu valcového kondenzátora výšky 10 cm s polomermi elektród $a = 1$ cm, $b = 2$ cm. Priestor medzi nimi je vyplnený porcelánom ($\varepsilon = 6\varepsilon_0$).

[$C = 48{,}11$ pF]

Postup riešenia je podobný ako v príklade 7.7.

7.14 Aké veľké je napätie medzi dvoma bodmi A a B, ktoré sú uložené vo vákuu v elektrostatickom poli náboja $Q = 5.10^{-7}$ C a to tak, že bod A je od náboja Q vo vzdialenosti $r_1 = 2$ cm a bod B vo vzdialenosti $r_2 = 10$ cm v tom istom smere? Akú prácu treba vykonať na prenesenie náboja $q = 3.10^{-8}$ C z miesta B do miesta A?

[$U = 179{,}8$ kV, $W = 539{,}5.10^{-5}$ J]

Pri riešení použite vzťahy (7.16) a (7.17).

7.15 Aký musí byť plošný obsah dosiek rovinného kondenzátora s izolačnou sklenou vrstvou hrúbky 1 mm, aby mal kondenzátor kapacitu 150 pF? Permitivita skla je $\varepsilon = 7\varepsilon_0$.

[$S = 24{,}188$ cm^2]

7.16 Ak medzi dosky rovinného vzduchového kondenzátora vložíme do stredu plech hrúbky 2 mm, bude jeho kapacita 9,5 pF. Aká bola pôvodná kapacita tohto kondenzátora pred vložením plechu, ak vzdialenosť jeho dosiek bola 1 cm?

[$C_0 = 7{,}6$ pF]

7.17 Doskový kondenzátor je napojený na napätie 10 V a jeho energia je 2 J. Vypočítajte vzdialenosť dosiek kondenzátora, ak plocha jednej z nich je 10^{-4} m^2 a medzi doskami je vákuum. Aká je intenzita elektrostatického poľa medzi doskami kondenzátora?

[$d = 2{,}214.10^{-14}$ m, $E_e = 4{,}52.10^{14}$ V/m]

7.18 Vo vákuu na časticu s nábojom 5.10^{-6} C pôsobí elektrostatická sila 0,015 N. Vypočítajte energiu poľa vo vákuu v jednotkovom objeme.

[$E_e = 39{,}865.10^{-6}$ J]

7.19 Kondenzátorová batéria pozostáva z dvoch sériovo zapojených kondenzátorov s kapacitami 300 pF a 500 pF. Aká je energia prvého kondenzátora, ak batéria je nabitá na napätie 12 000 V? Aké je napätie na prvom kondenzátore?

[$E = 8{,}43.10^{-3}$ J, $U_1 = 7500$ V]

7.20 Na aké napätie boli nabité dosky rovinného kondenzátora plochy 500 cm^2, vo vzdialenosti 1 cm, ak na oddialenie dosiek na vzdialenosť 4 cm bolo treba vykonať prácu $1{,}66.10^{-3}$ J?

[$U_1 = 5000$ V]

7.21 Vypočítajte energiu elektrostatického poľa kondenzátorovej batérie zapojenej podľa obr., ktorá pozostáva z 3 kondenzátorov. Kapacity kondenzátorov sú $C_1 = 2.10^{-6}$ F, $C_2 = 1.10^{-6}$ F, plošný obsah dosiek tretieho je 6.10^{-4} m a vzdialenosť jeho dosiek 0,1 mm. Batéria je napojená na napätie 220 V.

[E= 0,0161 J]

V úlohách 7.17 – 7.22 si pomôžte vzťahmi pre energiu.

7.22 Medzi dvoma rovnobežnými vertikálnymi doskami, vzdialenými od seba 0,5 cm sa nachádza kvapôčka hmotnosti 10^{-9} kg. Ak dosky nabijeme na rozdiel potenciálov 400 V, voľne pustená kvapôčka padá pod uhlom 70 stupňov 25 minút k vertikále. Určte jej náboj.

[q = 1,596.10^{-17} C]

7.23 Nabitá prachová častica hmotnosti 0,002 kg sa vznáša v elektrostatickom poli vytvorenom medzi dvoma vodorovnými doskami vzduchového kondenzátora s plochou dosiek 20 cm^2, ktorá má kapacitu 10 μF a je pripojený na napätie 100 V. Aký náboj má prachová častica?

[q = 3,47.10^{-16} C]

Inšpirujte sa príkladom 7.5.