4 Kmity a vlny

Už malé deti pri hojdaní na hojdačke inštinktívne vedia, že ak nebudú pri hojdaní meniť polohu svojich nôh, ich pohyb na hojdačke sa postupne bude spomaľovať, až nakoniec úplne zastanú. Prečo je to tak? Čo spôsobí ich zastavenie?

Základné pojmy:

netlmený harmonický kmitavý pohyb, tlmený harmonický kmitavý pohyb, pružná sila, odporová sila, pohybová rovnica, výchylka, kruhová frekvencia, perióda, útlm, logaritmický dekrement útlmu

V tejto kapitole sa budeme zaoberať kmitavým pohybom a vlnením. Najprv zadefinujeme veličiny pre ideálny typ **kmitavého pohybu**, tzv. netlmený harmonický kmitavý pohyb. Pre reálny kmitavý pohyb platí, že časom zastane, ak mu nedodáme energiu. Je to tlmený harmonický kmitavý pohyb. Pod **vlnením** rozumieme proces šírenia sa kmitavého pohybu prostredím. Teda zdrojom vlnenia je kmitavý pohyb. Súčasne ukážeme ako riešiť príklady na túto problematiku.

Mechanické kmitanie (oscilácia) je taký mechanický pohyb hmotného bodu, pri ktorom je hmotný bod viazaný na rovnovážnu polohu a to tak, že pri svojom pohybe neprekročí konečnú vzdialenosť od tejto polohy. Pod **periodickým pohybom** rozumieme pohyb, ktorý sa pravidelne opakuje. **Harmonický kmitavý pohyb** je pohyb, ktorý sa dá popísať funkciou sínus (kosínus).

Oscilátor je zariadenie, ktoré vykonáva kmitavý pohyb, napr. kyvadlové hodiny, guľôčka pripevnená ku pružine – pružinový oscilátor.

Netlmený harmonický kmitavý pohyb – nazývame pohyb oscilátora vplyvom pružných síl po priamke okolo rovnovážnej polohy.

Pružná sila je definovaná

$$F = -kx, \tag{4.1}$$

kde k je tuhosť pružiny, je to materiálová konštanta. **Pohybová rovnica** netlmeného harmonického kmitavého pohybu má tvar

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx, \tag{4.2}$$

kde m je hmotnosť hmotného bodu a x je jeho výchylka. Jedným z riešení tejto rovnice je výraz

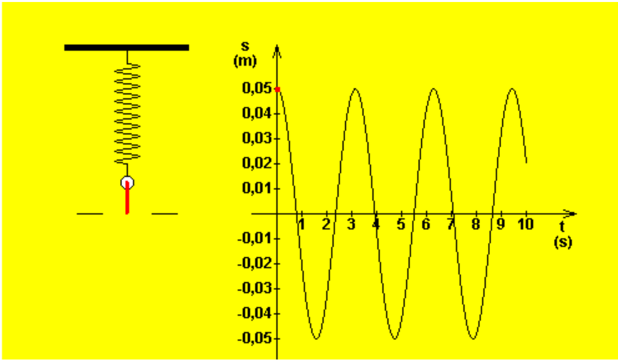
$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi\right), \tag{4.3}$$

ktorý predstavuje **výchylku (okamžitú výchylku)** netlmeného harmonického kmitavého pohybu.

Rovnica (4.3) popisuje závislosť výchylky od času. Jej hodnota je v každom čase iná. Jej grafickým znázornením je funkcia kosínus (obr. 4.1).

V rovnici (4.3) A je maximálna výchylka (amplitúda), φ je fázová konštanta pohybu a ω je **kruhová frekvencia**, ktorá je daná

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{4.4}$$



Obr. 4.1

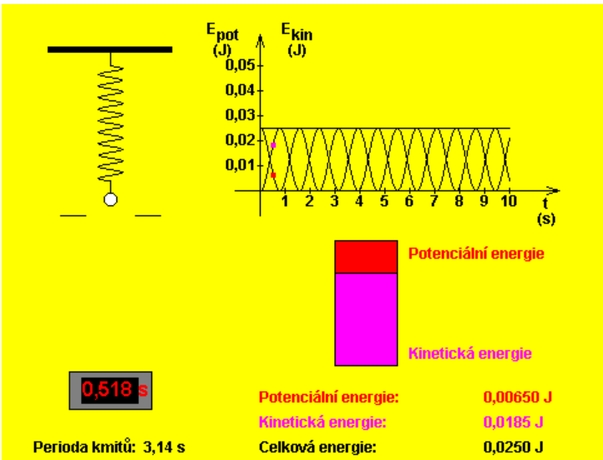
Pre **periódu**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{4.5}$$

Mechanická energia hmotného bodu vykonávajúceho netlmený harmonický kmitavý pohyb je konštantná a daná

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2\,. \tag{4.6}$$

Pre mechanickú energiu netlmeného harmonického kmitavého pohybu platí zákon zachovania mechanickej energie, pretože pri tomto pohybe neuvažujeme odporové sily, ktoré by tento pohyb tlmili. Kinetická energia sa premieňa na potenciálnu energiu pružnosti a naopak (obr. 4.2). Overte si toto tvrdenie pomocou apletu pružinový oscilátor.



Obr. 4.2

Ak na hmotný bod pri jeho kmitavom pohybe pôsobí odpor prostredia spôsobí, že časom kmitavý pohyb zanikne. Príčinou zastavenia kmitavého pohybu sú **odporové sily**, ktoré sú spravidla priamo úmerné rýchlosti

$$F = -rv = -r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{4.7}$$

kde r je konštanta úmernosti, ktorá vyjadruje tlmiace vlastnosti prostredia. Kmitavý pohyb, pri ktorom sa uplatňujú aj sily odporu, nazývame **tlmený harmonický kmitavý pohyb**.

Tlmený harmonický kmitavý pohyb – nazývame pohyb oscilátora vplyvom pružných a odporových síl po priamke okolo rovnovážnej polohy.

Pohybová rovnica pre tento pohyb je

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{4.8}$$

a jej riešením pre prípad slabého tlmenia ($\omega > b$) je

$$x = A_0 e^{-bt}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \tag{4.9}$$

kde A_0 je amplitúda netlmeného harmonického kmitavého pohybu. Táto rovnica popisuje **výchylku** tlmeného harmonického kmitavého pohybu, kde $b = \frac{r}{2m}$ a **kruhová frekvencia** je daná

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2}\,. \tag{4.10}$$

Vo vzťahu (4.10) je ω uhlová frekvencia pri netlmenom harmonickom kmitavom pohybe. Podiel dvoch za sebou nasledujúcich maximálnych výchyliek hmotného bodu na tú istú stranu sa nazýva **útlm**

$$\lambda = e^{bT_1} = \frac{A_1}{A_2}\,. \tag{4.11}$$

Kde b je koeficient útlmu a T_1 je **perióda (doba kmitu)** tlmeného pohybu

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}. \tag{4.12}$$

Prirodzený logaritmus útlmu je **logaritmický dekrement útlmu**

$$\delta = \ln \lambda = bT_1. \tag{4.13}$$

Ak deti počas ich hojdania na hojdačke nekývajú nohami, ich pohyb časom zastane, pretože je tlmený odporovými silami prostredia. Deti vykonávajú tlmený harmonický kmitavý pohyb. Tým, že inštinktívne pri hojdaní striedavo vystrú a zohnú svoje nohy, dodávajú hojdačke energiu potrebnú na udržanie ich pohybu a na prekonanie odporových síl.

Ak sa kmitavý pohyb šíri prostredím, postupuje ním **vlnenie**, teda kmitavý pohyb je zdrojom vlnenia v prostredí (napríklad reproduktor, kameň hodený do vody, guľôčka pripevnená na pružinu).

Zdroj vlnenia v príkladoch zapisujeme výrazom $u(x,t) = A\sin\omega t$ *alebo* $u(x,t) = A\cos\omega t$.

Pre mechanické vlnenie je charakteristické, že sa šíri len v látkovom prostredí. Ak sa kmitavý pohyb v prostredí šíri z jedného bodu na druhý, potom toto vlnenie nazývame **postupné vlnenie.** Rýchlosť šírenia sa vlnenia je v, pre **výchylku** častice prostredia vo vzdialenosti x od zdroja vlnenia platí

$$u(x,t) = A\sin\omega\left(t \mp \frac{x}{v}\right), \tag{4.14}$$

kde znamienko mínus (plus) znamená, že vlnenie sa šíri v kladnom (zápornom) smere osi x. Najkratšia vzdialenosť medzi dvoma bodmi, ktoré kmitajú s rovnakou fázou je **vlnová dĺžka** vlnenia, ktorá je definovaná

$$\lambda = vT. \tag{4.15}$$

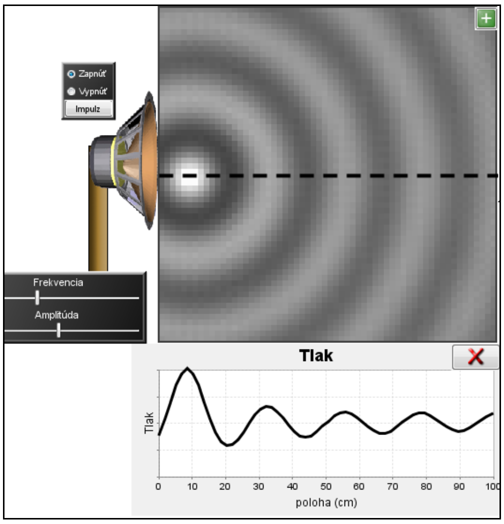
Výchylku môžeme vyjadriť aj pomocou vlnovej dĺžky v tvare

$$u(x,t) = A\sin 2\pi\left(ft \mp \frac{x}{\lambda}\right) = A\sin(\omega t \mp kx), \tag{4.16}$$

kde výraz

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{4.17}$$

predstavuje **vlnové číslo**.



Obr. 4.3

Vlnenia sa môžu navzájom skladať a v prípade, že skladáme vlnenie postupujúce v jednom smere a odrazené vlnenie postupujúce v opačnom smere, vznikne **stojaté vlnenie**. Pre toto vlnenie je charakteristické, že sa nešíri prostredím. Potom existujú miesta tzv. uzly, v ktorých častice prostredia nekmitajú, je v nich amplitúda 0 a miesta, v ktorých je max. amplitúda, tzv. kmitne.

Vzdialenosť dvoch susedných kmitní (uzlov) je rovná polovici vlnovej dĺžky skladajúcich sa vĺn

$$d = \frac{\lambda}{2}. \tag{4.18}$$

○ Riešené príklady

Príklad 4.1 Vypočítajte dobu kmitu T netlmeného harmonického kmitavého pohybu častice hmotnosti $m = 10$ g, ak sila udržujúca časticu v tomto pohybe má pri výchylke $x_1 = 3$ cm hodnotu $F_1 = 0{,}05$ N.

$m = 10 \text{ g} = 0{,}01 \text{ kg}$

$x_1 = 3 \text{ cm} = 0{,}03 \text{ m}$

$F_1 = 0{,}05 \text{ N}$

$T = ?$

Riešenie:

Pre dobu kmitu netlmeného harmonického kmitavého pohybu platí podľa vzťahu (4.5)

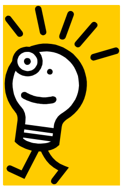
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \quad (1)$$

Na vyjadrenie k vo vzťahu (1) použijeme vzťah (4.1) z ktorého

$$k = \frac{F_1}{x_1}\,. \quad (2)$$

Dosadením (2) do (1) potom pre dobu kmitu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mx_1}{F_1}}\,. \quad (3)$$



Vzťah (2) sme vyjadrili bez znamienka mínus, pretože nás zaujíma veľkosť pružnej sily a nie jej smer.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}01.0{,}03}{0{,}05}} = 0{,}5\,\text{s}$$

Doba kmitu netlmeného harmonického kmitavého pohybu častice je 0,5 s.

Príklad 4.2 Určte amplitúdu a fázovú konštantu netlmeného harmonického pohybu častice, ak v čase $t_0 = 0$ s bola výchylka $x_1 = 5$ cm a rýchlosť $v_1 = 20 \text{ cms}^{-1}$, frekvencia pohybu je 1 s^{-1}.

$t_0 = 0$ s: $x_1 = 0{,}05$ s (1), $v_1 = 0{,}2 \text{ ms}^{-1}$ (2)

$A = ?$, $\varphi = ?$

Riešenie:

Na výpočet amplitúdy a fázovej konštanty použijeme vzťah pre výchylku a rýchlosť. Vzťah pre výchylku hmotného bodu $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ (3), upravíme na jednoduchší tvar použitím počiatočných podmienok. V $t_0 = 0$ s platí podmienka (1), ktorú dosadíme do (3)

$x_1 = A\cos(\omega .0 + \varphi)$. Úpravou $x_1 = A\cos\varphi$ (4).

Rýchlosť odvodíme pomocou výchylky $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$ (5). Použitím počiatočných podmienok, pre časový okamih $t_0 = 0$ s, platí podmienka (2). Po jej dosadení do (5) a úpravou pre rýchlosť $v_1 = -A\omega\sin\varphi$ (6).

Ak do rovnice (6) dosadíme za kruhovú frekvenciu $\omega = 2\pi f$, dostávame dve rovnice pre dve neznáme A a φ

$x_1 = A\cos\varphi$ (7)

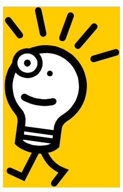
$v_1 = -2\pi f A\sin\varphi$ (8).

Rovnicu (8) upravíme na tvar $\frac{v_1}{-2\pi f} = A\sin\varphi$ (9). Amplitúdu získame pomocou rovníc (7) a (9), ktoré umocníme a sčítame. Odtiaľ pre amplitúdu

$$A = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{v_1}{-2\pi f}\right)^2} \; . \quad (10)$$

Fázovú konštantu vypočítame zo vzťahu

$$tg\varphi = \frac{v_1}{2\pi f x_1} \; . \quad (11)$$



Pri výpočte fázovej konštanty sme rovnicu (9) delili rovnicou (7). Odtiaľ sme získali vzťah (11).

Po číselnom dosadení do rovníc (10) a (11) získame $\varphi = -32{,}5°$, $A = 0{,}059$ m = 5,9 cm.

Fázová konštanta netlmeného harmonického pohybu častice je - 32,5° a amplitúda je 5,9 cm.

Príklad 4.3 Aký je pomer potenciálnej a kinetickej energie harmonicky kmitajúcej častice v časovom okamihu t = T/8? Riešte úlohu pri počiatočných podmienkach: pre $t_0 = 0$ s výchylka z rovnovážnej polohy $x_0 = A$ a rýchlosť $v = 0$.

$t_0 = 0$ s: $x_0 = A$ (1), $v_1 = 0$ (2)

$E_p / E_k = ?$ .... $t = T/8$ s

Riešenie:

Na vyjadrenie podielu energií, najprv odvodíme vzťah pre potenciálnu a kinetickú energiu. Potenciálna energia hmotného bodu s výchylkou x (4.3) pri uvedených počiatočných podmienkach

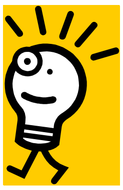
$$E_\mathrm{p} = -\int F.\mathrm{d}x = \int_0^x kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t\ .$$

Kinetická energia s rýchlosťou v (vzťah (5) z príkladu 4.2)

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\ A^2 \sin^2 \omega t\ .$$

Potom pre podiel energii

$$\frac{E_\mathrm{p}}{E_\mathrm{k}} = \frac{\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t}{\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t} = \mathrm{cotg}^2 \frac{2\pi}{T}t = \mathrm{cotg}^2 \frac{2\pi}{T}\frac{T}{8} = \mathrm{cotg}^2 \frac{\pi}{4} = 1 \qquad (3)$$



Pri výpočte sme vo vzťahu (3) za kruhovú frekvenciu dosadili $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

V časovom okamihu T/8 s je potenciálna energia kmitajúcej častice práve rovná jej kinetickej energii.

Príklad 4.4 Pri tlmenom harmonickom kmitavom pohybe sa po dvoch za sebou idúcich výchylkách hmotného bodu na tú istú stranu amplitúda kmitov zmenšila o 6/10, doba kmitu je 0,5 s. Určte koeficient útlmu b a frekvenciu netlmených kmitov, ktoré by prebiehali za inak rovnakých podmienok.

$\Delta A = 6/10\ A_1$

$T_1 = 0{,}5$ s

$b = ?,\ f = ?$

Riešenie:

Označme prvú tlmenú amplitúdu A_1 a druhú tlmenú amplitúdu A_2. Potom $\Delta A = A_1 - A_2 = \frac{6}{10}A_1$. Odtiaľ úpravou pre druhú amplitúdu

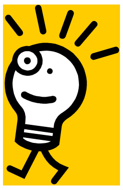
$$A_2 = A_1 - \frac{6}{10}A_1 = \frac{4}{10}A_1 \ (1).$$

Zo zadania úlohy vyplýva, že podiel dvoch za sebou idúcich výchyliek hmotného bodu na tú istú stranu vyjadruje útlm, pre ktorý platí

$$\lambda = \frac{A_1}{A_2} = e^{bT_1} \ (2).$$

Potom dosadením (1) do (2) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{10}{4} = e^{bT_1}$ (3). Úpravou pre koeficient útlmu

$$b = \frac{1}{T_1}\ln\frac{10}{4} = \frac{1}{0{,}5}\ln\frac{10}{4} = 1{,}83\,\mathrm{s}^{-1}.$$



Pri výpočte koeficientu útlmu sme rovnicu (3) matematicky upravili pomocou inverznej funkcie ku exponenciálnej funkcii, teda pomocou logaritmu.

Na vyjadrenie kruhovej frekvencie netlmených kmitov, ktoré by prebiehali za inak rovnakých podmienok použijeme vzťah (4.10), v ktorom ω je kruhová frekvencia netlmeného harmonického kmitavého pohybu. Potom

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 - b^2},$$

kde za kruhovú frekvenciu tlmeného kmitavého pohybu dosadíme $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ a za kruhovú frekvenciu netlmeného kmitavého pohybu dosadíme $\omega = 2\pi f$. Potom

$$2\pi f = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T_1^2} - b^2}\ .$$

Frekvencia netlmeného kmitavého pohybu

$$f=\frac{\sqrt{\frac{4\pi^2}{T_1^2}-b^2}}{2\pi}=\frac{\sqrt{\frac{4\pi^2}{0{,}5^2}-1{,}83^2}}{2\pi}=2{,}02\ \mathrm{s}^{-1}$$

Koeficient útlmu je 1,83 s^{-1} a frekvenciu netlmených kmitov, ktoré by prebiehali za inak rovnakých podmienok je 2,02 s^{-1}.

Príklad 4.5 Logaritmický dekrement tlmených harmonických kmitov je 0,02. Koľkokrát sa zmenší amplitúda po 100 kmitoch?

$\delta = 0{,}02$

$t_1 = 100\ T_1$

$\lambda = ?$

Riešenie:

Na určenie koľkokrát sa zmenší amplitúda po 100 kmitoch použijeme vzťah pre útlm, ktorý vyjadríme ako podiel prvej a stej amplitúdy

$$\lambda=\frac{A_1}{A_{100}}\quad(1).$$

Prvá tlmená amplitúda sa mení s časom podľa vzťahu $A_1 = A_0e^{-bt}$ (2), kde A_0 je amplitúda netlmeného harmonického kmitavého pohybu. Medzi prvou a druhou tlmenou amplitúdou je časový posun o jednu periódu T_1. Potom $A_2 = A_0e^{-b(t+T_1)}$. Pre stú amplitúdu platí, že nastane za $t_1 = 100\ T_1$. Potom $A_{100} = A_0e^{-b(t+100T_1)}$ (3). Dosadením (2) a (3) do (1)

$$\frac{A_1}{A_{100}}=\frac{A_0e^{-bt}}{A_0e^{-b(t+100T_1)}}=e^{b.100T_1}=e^{100\delta}\ (4),$$

kde sme využili, že $bT_1=\delta$.

Po dosadení číselných hodnôt do (4)

$$\frac{A_1}{A_{100}}=e^{100.0{,}2}=e^2=7{,}4\,.$$

Po sto kmitoch sa amplitúda zmenší 7,4 - krát.

Príklad 4.6 Vlnenie sa šíri od zdroja rýchlosťou v = 300 ms^{-1}, amplitúda A = 5 cm, vlnová dĺžka λ = 75 cm. Koľko času prejde od vzniku vlnenia po okamih, kedy častica nachádzajúca sa vo vzdialenosti x = 50 cm od zdroja sa vychýli o 2,5 cm? Zdrojom vlnenia sú kmity dané vzťahom $u(0,t) = A\sin\omega t$.

$v = 300\ \mathrm{ms^{-1}}$
$A = 0{,}05$ m
$\lambda = 0{,}75$ m
$x = 0{,}5$ m
$u = 0{,}025$ m

$t = ?$

Riešenie:

Na vyjadrenie výchylky častice použijeme vzťah (4.14), kde dosadíme $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Zo zadania vyplýva, že vlnenie sa šíri od zdroja v kladnom smere osi x. Potom vo vzťahu pre výchylku bude vystupovať znamienko mínus

$u(x,t) = A\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{vT}\right)$ (1). Pre vlnovú dĺžku platí $\lambda = vT$ (2).

Dosadením (2) do (1)

$$u(x,t) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Odtiaľ úpravou pre dobu t, za ktorú sa častica vychýli o 2,5 cm od zdroja

$$t = T\left(\frac{1}{2\pi}\arcsin\frac{u}{A} + \frac{x}{\lambda}\right) \quad (3).$$

Ak vo vzťahu (3) vyjadríme periódu pomocou vlnovej dĺžky použitím vzťahu (2) pre hľadaný časový okamih

$$t = \frac{\lambda}{v}\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{1}{2\pi}\arcsin\frac{u}{A}\right) = \frac{x}{v} + \frac{\lambda}{2\pi v}\arcsin\frac{u}{A}$$

Po číselnom dosadení

$$t = \frac{0{,}05}{300} + \frac{0{,}75}{2\pi 300}\arcsin\frac{0{,}025}{0{,}05} = 0{,}0019\,\mathrm{s}$$

Doba, za ktorú sa častica vychýli o 2,5 cm od zdroja je 0,0019 s.

○ Úlohy

4.1 Kyvadlo vykonáva netlmený harmonický pohyb po priamke tak, že v prvej štvrťperióde v čase 0,5 s má okamžitú výchylku 5 cm. Vypočítajte periódu a frekvenciu tohto pohybu, keď amplitúda výchylky je 10 cm.

[T = 6 s, f = 1/6 Hz]

4.2 Doska vykonáva netlmený kmitavý pohyb v zvislom smere s periódou 1 s a amplitúdou 5 cm. Na doske je položené závažie hmotnosti 3 kg. Akou silou tlačí závažie na dosku v čase t = 0,2 s? Počiatočná fáza kmitavého pohybu je 0.

[F = 31,26 N]

Pri riešení použite vzťahy (4.1) a (4.3).

4.3 Závažie zavesené na pružine, kmitá netlmeným harmonickým pohybom s amplitúdou 4 cm. Akú má frekvenciu jeho pohyb, ak jeho maximálna rýchlosť je 0,0314 m/s.

[f = 0,125 Hz]

49.4 Stred struny kmitá s frekvenciou 20 Hz s maximálnym zrýchlením 47 m/s^2. Vypočítajte amplitúdu výchylky netlmeného kmitavého pohybu struny.

[A = 3 mm]

4.5. Počiatočná fáza netlmených kmitov hmotného bodu je $\pi/6$. Po akom čase od začiatku pohybu nadobudne hmotný bod zrýchlenie, ktoré sa rovná 1/3 jeho maximálneho zrýchlenia? Perióda kmitov je 0,5 s.

[t = 0,43 s]

V úlohách 4.3 - 4.5 si odvoďte najprv vzťahy pre maximálne hodnoty rýchlosti a zrýchlenia.

4.6 Hmotný bod sa pri svojom netlmenom harmonickom pohybe vyznačuje v čase t = 1 s rýchlosťou 20 cm.s^{-1} a zrýchlením 80 cm.s^{-2}. Frekvencia pohybu je 0,6 Hz. Vypočítajte amplitúdu a fázovú konštantu tohto pohybu.

[x_0 = 7,73 cm, φ = -0,94π]

Túto úlohu riešte pomocou príkladu 4.2.

4.7 Amplitúda netlmených harmonických kmitov pružinového oscilátora je 2 cm a celková energia je 3.10^{-7} J. Pri akej výchylke z rovnovážnej polohy pôsobí na kmitajúci oscilátor sila 2,25.10^{-5} N?

[x = 1,5 cm]

4.8 Vypočítajte celkovú energiu netlmeného harmonického kmitavého pohybu častice hmotnosti 2 g, ak jej amplitúda je 10 cm a frekvencia kmitavého pohybu je 50,35 Hz.

[E = 1 J]

4.9 Akú časť celkovej energie netlmeného lineárneho harmonického oscilátora tvorí kinetická energia v čase t = T/3, keď počiatočná fáza bola π/6?

[75%]

4.10 Pomer kinetickej energie ku potenciálnej energii netlmeného harmonického oscilátora v čase t = T/4 je rovný 2. Aká je počiatočná fáza tohto harmonického pohybu?

[φ = -54,7°]

4.11 Teleso hmotnosti 680 g je pripevnené k pružine tuhosti 65N/m. Amplitúde jeho netlmeného harmonického pohybu je 11 cm. Aká je jeho mechanická energia? Aká je jeho potenciálne energia v okamihu, keď sa teleso nachádza na polovičke cesty k bodu obratu, t.j. $x = A/2$? Aká je jeho kinetická energia v tomto bode?

[E = 0,393 J, E_p = 0,098 J, E_k = 0,295 J]

V týchto úlohách si pomôžte príkladom 4.3.

4.12 Amplitúda tlmeného lineárneho harmonického oscilátora klesla po 50 kmitoch 10 - krát. Aký je logaritmický dekrement?

[δ = 0,046]

4.13 Po 5 za sebou idúcich maximálnych výchylkách hmotného bodu na tú istú stranu klesla amplitúda jeho tlmeného harmonického pohybu 2-krát. Doba kmitu je 0,5 s. Určte konštantu útlmu a frekvenciu netlmených kmitov, ktoré by prebiehali za inak rovnakých podmienok.

[T_1 = 3,6 s, b = 0,011 s^{-1}]

4.14 Vypočítajte koeficient útlmu a útlm, ak frekvencia tlmených harmonických kmitov je 3 Hz a frekvencia netlmených harmonických kmitov je 3,5 Hz za tých istých podmienok.

[λ = 43,24, b = 11,32 s^{-1}]

Inšpirujte sa príkladom 4.4.

4.15 Tlmený oscilátor tvorí teleso s hmotnosťou 250 g, ktoré je zavesené na pružine. Oscilátor kmitá vo vode, ktorá tlmí jeho pohyb. Tuhosť pružiny je 85 N/m a koeficient útlmu vody 70 g/s. Vypočítajte periódu tlmeného harmonického kmitavého pohybu. Za akú dobu, sa zmenší amplitúda kmitov na polovicu svojej počiatočnej veľkosti? Za akú dobu sa zmenší mechanická energia oscilátora na polovicu svojej počiatočnej veľkosti?

[T_1 = 0,34 s, t = 9,9 s, t = 4,95 s]

4.16 Logaritmický dekrement tlmeného harmonického pohybu hmotného bodu je 0,04. Za 10 s takéhoto pohybu stratí hmotný bod 20% svojej energie. Aká je doba kmitu a koeficient útlmu?

[T_1 = 3,6 s, b = 0,011 s^{-1}]

4.17 Aký je logaritmický dekrement tlmených harmonických kmitov oscilátora, keď za 10 s svojho pohybu stratí 60 % svojej energie a doba kmitu je 2 s?

[δ = 0,092]

Pri riešení úloh 4.15 – 4.17 použite pri výpočte vzťah pre celkovú energiu (4.6), v ktorom amplitúda *A* sa vzťahuje na tlmený harmonický kmitavý pohyb.

4.18 Výchylka postupného vlnenie v rade bodov je daná $u(x,t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$. Vypočítajte vlnovú dĺžku vlnenia, keď kruhová frekvencia je 12 π s^{-1} a rýchlosť vlnenia je 6 m/s.

[λ = 1 m]

4.19 Vlnenie s frekvenciou 8 Hz postupuje fázovou rýchlosťou 20 m/s. Aký je fázový rozdiel bodov, ktoré sú od seba vzdialené o 50 cm?

[$\Delta\varphi$ = 0,4π rad]

4.20 Vlnenie s frekvenciou 440 Hz prechádza vo vzduchu do vody. Ako sa zmení jeho vlnová dĺžka? Fázová rýchlosť vlnenia vo vzduchu je 340 m/s a vo vode 1440 m/s.

[$\Delta\lambda$ = 2,5 m]

4.21 Napíšte rovnicu postupného harmonického vlnenia s frekvenciou 500 Hz a s amplitúdou výchylky 1 mm, ktorá postupuje rýchlosťou 5 m/s v smere kladnej osi x. Určte okamžitú výchylku bodu vo vzdialenosti 0,122 m od zdroja v čase 0,025 s. Zdrojom vlnenia sú kmity dané vzťahom $u(0,t) = A\sin\omega t$.

[$u(x,t) = 0{,}001\sin 2\pi(500t - 100x)\,\mathrm{m}$, $u(x,t)$ = 0,00095 m]

4.22 Určte amplitúdu, periódu, frekvenciu, vlnovú dĺžku a rýchlosť šírenia sa vlnenia, ktoré je dané rovnicou $u(x,t) = 0{,}5\sin 2\pi(10t - 5x)\,\mathrm{m}$

[A = 0,5 m, T = 0,1 s, f = 10 Hz, λ = 0,2 m, v = 2 m/s]

4.23 Aká je výchylka od rovnovážnej polohy bodu, ktorý je vzdialený od zdroja vlnenia o 1/12 vlnovej dĺžky v čase T/6 s, ak amplitúda výchylky je 5 cm.

[$u(x,t)$ = 0,025 m]

4.24 Vlnenie sa šíri od zdroja vlnenia rýchlosťou 0,6 m/s. Jeho amplitúda je 10 cm a vlnová dĺžka 6 cm. V akej vzdialenosti x od zdroja bude mať okamžitá výchylka hodnotu 5 cm.

[x = 2,995 m]

4.25 Hmotný bod vo vzdialenosti 2 cm od zdroja vlnenia má v časovom okamihu t = ¼ T výchylku rovnú polovici amplitúdy. Nájdete vlnovú dĺžku postupujúcej vlny. Zdrojom vlnenia sú kmity dané vzťahom $u(0,t) = A\sin\omega t$.

[λ = 0,12 m]

V úlohach 4.23 – 4.25 sa inšpirujte príkladom 4.6.

4.26 Netlmené kmity dané vzťahom $u(0,t) = \sin 2{,}5\pi t$ [cm] sú zdrojom vlnenia. Rýchlosť šírenia sa vlnenia je 100 $\mathrm{ms^{-1}}$. Aká je výchylka z rovnovážnej polohy, rýchlosť a zrýchlenie bodu, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti 20 m od zdroja vlnenia, v čase t = 1 s od začiatku kmitania zdroja?

[y = 0, v = 2,5π $\mathrm{cms^{-1}}$, a = 0]

4.27 Zvukové vlny s vlnovou dĺžkou 70 cm sa šíria vo vzduchu. Frekvencia zvuku je 500 $\mathrm{s^{-1}}$ a amplitúda kmitov je 0,25 mm. Nájdite rýchlosť šírenia sa vĺn a maximálnu rýchlosť častíc vzduchu.

[v = 350 $\mathrm{ms^{-1}}$, v_{max} = 0,785 $\mathrm{ms^{-1}}$]

4.28 Stojaté vlnenie vzniklo skladaním dvoch proti sebe postupujúcich vlnení s frekvenciou 2 kHz. Vzdialenosť susedných uzlov bola 10 cm. Aká je rýchlosť šírenia sa vlnenia?

[v = 400 m/s]