3 Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa

Je možné, aby pri čelnom náraze dvoch železničných vagónov, vagón s niekoľkonásobne vyššou hmotnosťou zmenil svoj smer a po náraze sa pohyboval v pôvodnom smere pohybu ľahšieho vagóna spolu s ľahším vagónom?

Základné pojmy:

moment sily, moment hybnosti, ťažisko sústavy hmotných bodov a tuhého telesa, 1. veta impulzová, 2. veta impulzová, zákon zachovania hybnosti, zákon zachovania momentu hybnosti, kinetická energia sústavy hmotných bodov a tuhého telesa, moment zotrvačnosti, Steinerova veta, pohybová rovnica rotujúceho telesa, práca, výkon, veta o kinetickej energii, kyvadlá

Hmotný bod bol zavedený do mechaniky ako teleso, ktorého tvar a rozmery pri riešení mechanického pohybu bolo možné zanedbať. Keď to charakter úlohy neumožňuje, potom ide o tzv. teleso. Každé teleso podľa zloženia môžeme považovať za **sústavu hmotných bodov**. Pohyb sústavy hmotných bodov ako celku je určený vtedy, keď poznáme pohyb každého z jej bodov. Pri popisovaní pohybu telesa berieme do úvahy, že vonkajšie sily, ktoré naň pôsobia, ho nedeformujú. Takému telesu hovoríme **dokonale tuhé teleso**. V tejto kapitole sa sústredíme na popis pohybu sústav hmotných bodov a tuhých telies na konkrétnych príkladoch.

Pri popisovaní pohybu telesa berieme do úvahy, že vonkajšie sily, ktoré naň pôsobia, ho nedeformujú. Takému telesu hovoríme **dokonale tuhé teleso**. V tejto kapitole sa sústredíme na popis pohybu sústav hmotných bodov a tuhých telies na konkrétnych príkladoch.

Moment sily charakterizuje otáčavý účinok sily na teleso alebo jeden hmotný bod a je daný vzťahom

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}\,, \tag{3.1}$$

kde $\vec{r}$ je polohový vektor pôsobiska sily. Jednotkou momentu sily je newtonmeter, (M) = Nm.

Moment hybnosti je veličina, ktorá charakterizuje pohybový stav telesa pri otáčavom pohybe (podobne ako hybnosť charakterizuje pohybový stav pri posuvnom pohybe)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}\,, \tag{3.2}$$

jej jednotkou je kilogram meter na druhú za sekundu, (L) = kg.m^2/s.

Ťažisko resp. hmotný stred sústavy hmotných bodov alebo telesa je bod, v ktorom je sústredená všetka hmotnosť sústavy (telesa) a pôsobí v ňom celková tiaž celej sústavy (telesa). Pre <u>sústavu hmotných bodov</u> je jeho poloha vzhľadom na zvolený súradnicový systém daná vzťahom

$$\vec{r}_{\mathrm{T}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_{\mathrm{i}}\vec{r}_{\mathrm{i}}}{\sum_{i=1}^{N} m_{\mathrm{i}}}\,, \tag{3.3}$$

kde m_i je hmotnosť i – tého bodu sústavy a $\vec{r}_i$ je jeho polohový vektor. Vzťah (3.3) vyjadruje polohový vektor ťažiska sústavy. Poloha ťažiska môže byť popísaná aj pomocou súradníc vzhľadom na zvolený súradnicový systém

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_{\mathrm{i}} x_{\mathrm{i}}}{\sum_{i=1}^{N} m_{\mathrm{i}}} \quad y_{\mathrm{T}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_{\mathrm{i}} y_{\mathrm{i}}}{\sum_{i=1}^{N} m_{\mathrm{i}}} \quad z_{\mathrm{T}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_{\mathrm{i}} z_{\mathrm{i}}}{\sum_{i=1}^{N} m_{\mathrm{i}}} \tag{3.4}$$

Polohový vektor ťažiska telesa je daný vzťahom

$$\vec{r}_{\mathrm{T}} = \frac{1}{m} \int \vec{r} \, \mathrm{d}m , \tag{3.5}$$

kde vektor $\vec{r}$ je polohový vektor vybraného hmotného elementu dm. Zložky vektora $\vec{r}_{\mathrm{T}}$ môžu byť vyjadrené

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{1}{m} \int x \, \mathrm{d}m \quad y_{\mathrm{T}} = \frac{1}{m} \int y \, \mathrm{d}m \quad z_{\mathrm{T}} = \frac{1}{m} \int z \, \mathrm{d}m . \tag{3.6}$$

Prvá veta impulzová (veta o hybnosti sústavy) popisuje posuvný pohyb sústavy hmotných bodov a tuhého telesa, podľa ktorej výslednica všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov alebo teleso je rovná časovej zmene hybnosti sústavy resp. telesa

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} . \tag{3.7}$$

Druhá veta impulzová (veta o momente hybnosti) popisuje rotačný pohyb sústavy hmotných bodov a tuhého telesa. Jej znenie je nasledovné: vektorový súčet všetkých momentov vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov alebo teleso je rovný časovej zmene momentu hybnosti sústavy resp. telesa

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} . \tag{3.8}$$

Zákon zachovania hybnosti vyplýva z prvej impulzovej vety

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{konšt.} . \tag{3.9}$$

Ak súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu alebo na teleso je rovný nule, potom celková hybnosť sústavy hmotných bodov alebo telesa je konštantná.

Zákon zachovania momentu hybnosti vyplýva z druhej impulzovej vety

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{konšt.}. \tag{3.10}$$

Ak súčet všetkých momentov vonkajších síl pôsobiacich na sústavu alebo na teleso je rovný nule, potom celkový moment hybnosti sústavy hmotných bodov je konštantný.

Kinetická energia telesa rotujúceho okolo pevnej osi je daná vzťahom

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} I \omega^2 , \tag{3.11}$$

kde výraz

$$I = \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m \tag{3.12}$$

je **moment zotrvačnosti telesa** vzhľadom na os, okolo ktorej rotuje.

Moment zotrvačnosti závisí od voľby osi otáčania a rozloženia hmotných bodov sústavy resp. hmotnosti telesa okolo nej. Ak sa zmení os otáčania, prejde k prerozdeleniu rozloženia hmotných bodov resp. hmotnosti telesa, teda sa zmení aj hodnota momentu zotrvačnosti.

Jednotka momentu zotrvačnosti je kilogram meter na druhú, (I) = kg.m^2.

V prípade výpočtu momentu zotrvačnosti vzhľadom na os, ktorá neprechádza ťažiskom telesa a jej od neho vzdialená o určitú vzdialenosť použijeme tzv. **Steinerovu vetu**

$$I = ma^2 + I_0 , \tag{3.13}$$

kde I_0 je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na ťažisko.

Steinerova veta hovorí: moment zotrvačnosti telesa vzhľadom k osi neprechádzajúcej ťažiskom je rovný momentu zotrvačnosti telesa vzhľadom k osi s ňou rovnobežnou, prechádzajúcou ťažiskom, zväčšenou o súčin hmotnosti telesa m a kvadrátu vzdialenosti ťažiska od pôvodnej osi a (ma^2).

Ak sa teleso valí, čo je **zložený pohyb** (otáčanie a posúvanie), má kinetickú energiu rovnú súčtu kinetických energií posuvného a otáčavého pohybu, t.j.

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 . \tag{3.14}$$

Pohybová rovnica rotujúceho telesa okolo pevnej osi

$$M = \varepsilon I , \tag{3.15}$$

kde ε je uhlové zrýchlenie a I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom k osi rotácie.

Pohybová rovnica hovorí: súčin momentu zotrvačnosti telesa k osi rotácie a uhlového zrýchlenia sa rovná momentu všetkých vonkajších síl vzhľadom k tej istej osi rotácie.

Moment hybnosti pre teleso rotujúce okolo pevnej osi je

$$L = I\omega . \tag{3.17}$$

Práca telesa rotujúceho okolo pevnej osi vykonaná vonkajšími silami pri otočení telesa o uhol $\varphi_2 - \varphi_1$ je

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \mathrm{d}\varphi . \tag{3.18}$$

Jednotkou práce je joule, (W) = J.

Vetu o kinetickej energii, v prípade otáčavého pohybu tuhého telesa okolo pevnej osi, môžeme matematicky zapísať v tvare

$$W = \frac{1}{2} I\ \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2 = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k\,, \tag{3.19}$$

kde ω_1, ω_2 sú uhlové rýchlosti tuhého telesa na začiatku a na konci pôsobenia momentu vonkajších síl M.

Výkon (práca vykonaná za jednotku času) je v prípade otáčavého pohybu tuhého telesa daný vzťahom

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\omega. \tag{3.20}$$

Jednotkou výkonu je watt, (P) = W.

Pre **periódu** kmitov fyzikálneho kyvadla

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}\,. \tag{3.21}$$

Fyzikálne kyvadlo je teleso, ktoré sa kyve bez trenia vplyvom vlastnej tiaže okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej ťažiskom. Ide tu v podstate o rotačný pohyb telesa okolo pevne osi..

Pre **periódu** kmitov matematického kyvadla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{3.22}$$

Matematickým kyvadlom nazývame teleso hmotnosti m, zavesené na tuhom vlákne dĺžky l, ktorého hmotnosť je zanedbateľná vzhľadom k hmotnosti telesa.

○ Riešené príklady

Príklad 3.1 Štyri hmotné body s hmotnosťami m_1 = 2 g, m_2 = 5 g, m_3 = 10 g a m_4 = 7 g sú rozložené v priestore v bodoch A_1 $[-4;2;7]$, A_2 $[-2;-3;-4]$, A_3 $[-4;2;7]$ a A_4 $[1;-4;-6]$, kde súradnice v zátvorke sú udané v centimetroch. Vypočítajte súradnice ťažiska tejto sústavy hmotných bodov.

A_1 $[-4;2;7]$, m_1 = 2 g

A_2 $[-2;-3;-4]$, m_2 = 5 g

A_3 $[-4;2;7]$, m_3 = 10 g

A_4 $[1;-4;-6]$, m_4 = 7 g

---

x_T, y_T, z_T = ?

Riešenie:

Body, ktorých súradnice a hmotnosti sú dané, predstavujú sústavu 4 bodov. Na výpočet súradníc ťažiska tejto sústavy použijeme rovnice (3.4), ktoré upravíme pre tejto prípad

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \quad (1)$$

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \quad (2)$$

$$z_T = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + m_4 z_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \quad (3).$$

Dosadením za hmotnosti a súradnice jednotlivých bodov do vzťahov (1) – (3) pre súradnice ťažiska sústavy dostávame

$$x_T = \frac{2.(-4) + 5.(-2) + 10.(-4) + 7.1}{2 + 5 + 2 + 10 + 7} = \frac{-51}{24} = -2{,}125 \text{ cm}$$

$$y_T = \frac{2.2 + 5.(-3) + 10.2 + 7.(-4)}{2 + 5 + 2 + 10 + 7} = \frac{-19}{24} = -0{,}792 \text{ cm}$$

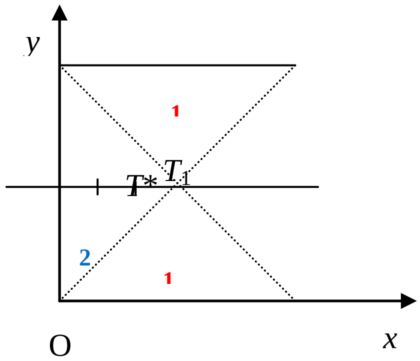
$$x_T = \frac{2.7 + 5.(-4) + 10.7 + 7.(-6)}{2 + 5 + 2 + 10 + 7} = \frac{22}{24} = 0{,}917 \text{ cm}$$

Súradnice ťažiska sústavy 4 bodov sú $\boldsymbol{T = [-2{,}125;-0{,}792;0{,}917]\,\text{cm}}$.

Príklad 3.2 Vypočítajte súradnice ťažiska útvaru, ktorý vznikne, keď z homogénneho štvorca zanedbateľnej hrúbky, s dĺžkou strany a, vystrihneme rovnoramenný trojuholník podľa obr. 3.1.

a

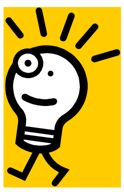
$T = ?$



Obr. 3.1

Riešenie:

Po vystrihnutí trojuholníka zo štvorca, môžeme zvyšok telesa rozdeliť na 3 zhodné rovnoramenné trojuholníky. Dva protiľahlé trojuholníky (nad a pod vodorovnou osou prechádzajúcou bodom T_1) vytvárajú teleso, ktoré má ťažisko v tomto bode. Jeho súradnice v danej súradnej sústave sú $T_1 = \left[\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$. Tretí trojuholník (číslo 2) má ťažisko v bode $T_2 = \left[\frac{1}{3}.\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] = \left[\frac{a}{6}, \frac{a}{2}\right]$.



Ťažisko v rovnoramennom trojuholníku leží v 1/3 tretine výšky trojuholníka.

Preto x-ová súradnica ťažiska T_2 je $a/6$, kde $a/2$ je výška trojuholníka č.2.

Ak označíme hmotnosť jedného trojuholníka m, potom ťažisko hľadaného útvaru T^* nájdeme ako ťažisko sústavy dvoch hmotných bodov. Prvý je v bode T_1 a jeho hmotnosť je $2m$, druhý je v bode T_2 a jeho hmotnosť je m.

Súradnice ťažiska T^* vypočítame pomocou vzťahu (3.4)

$$x^* = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{2m\frac{a}{2} + m\frac{a}{6}}{2m + m} = \frac{7}{18}a\,,$$

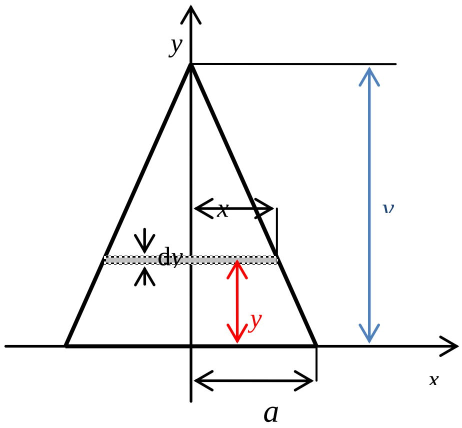
$$y^* = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{2m\frac{a}{2} + m\frac{a}{2}}{2m + m} = \frac{1}{2}a\,.$$

Ťažisko daného útvaru má súradnice $\boldsymbol{T^* = \left[\frac{7a}{18}, \frac{a}{2}\right]}$**.**

Príklad 3.3 Vypočítajte polohu ťažiska homogénnej dosky tvaru rovnoramenného trojuholníka s ramenami b a základňou $2a$ (obr. 3.2).

a, b

$T = ?$



Obr. 3.2

Riešenie:

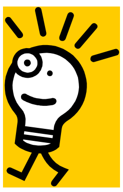
V tomto prípade nemôžeme dosku nahradiť sústavou hmotných bodov ako v predchádzajúcom príklade. Musíme sa na ňu dívať ako na teleso, ktorého súradnice ťažiska vypočítame pomocou vzťahov (3.6). zvolíme si súradnicový systém, do ktorého dosku umiestnime tak, aby bola symetrická podľa osi y. Zo symetrie vyplýva (obr. 3.2), že počítame iba y - ovú súradnicu ťažiska, pretože x – ová súradnica je rovná nule. Potom

$$x_T = \frac{1}{m}\int x\,\mathrm{d}m = 0$$

$$y_T = \frac{1}{m}\int y\,\mathrm{d}m\,, \quad (1)$$

kde dm predstavuje hmotný element (veľmi malá časť telesa tejto hmotnosti), na výpočet ktorého použijeme plošnú hustotu

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}S} = \frac{m}{S}\,. \quad (2)$$



Vo vzťahu (2) je dS obsah hmotného elementu, ktorý si v príkladoch volíme.

S a m predstavujú obsah a hmotnosť celej dosky.

Hmotný element vyberieme v tvare pásika rovnobežného s osou x, ktorého dS určíme ako obsah obdĺžnika dS = $2x\mathrm{d}y$ (3). Obsah dosky je S = ½.2av (4).Úpravou vzťahu (2) a dosadením za plochy vzťahy (3) a (4) hmotnosť hmotného elementu je

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{av}2x\mathrm{d}y\,. \quad (5)$$

Súradnicu x vyjadríme cez premennú y pomocou podobnosti trojuholníkov pri odvesnách a, v vzhľadom k odvesnám x, $(v-y)$

$$x=\frac{a}{v}(v-y),\ \text{resp.}\ x=a\left(1-\frac{y}{v}\right) \quad (6)$$

Potom dosadením (5) a (6) do (1) y – ová súradnica ťažiska

$$y^{*}=\frac{1}{m}\int y\mathrm{d}m=\frac{1}{m}\int y\frac{m}{av}2x\mathrm{d}y=\frac{2}{av}\int_{0}^{v}a\left(1-\frac{y}{v}\right)y\mathrm{d}y=\frac{2}{v}\left[\frac{y^{2}}{2}-\frac{y^{3}}{3v}\right]_{0}^{v}=\frac{1}{3}v=\frac{1}{3}\sqrt{b^{2}-a^{2}}\,.$$

Súradnice ťažiska sú $\boldsymbol{T=\left[0;\frac{1}{3}\sqrt{b^{2}-a^{2}}\right]}$.

Príklad 3.4 Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej tyče dĺžky l, prierezu S a hmotnosti m vzhľadom na os kolmú na smer dĺžky a) prechádzajúcu koncovým bodom tyče, b) prechádzajúcu stredom tyče.

l, m -

I = ?

Riešenie:

a) Moment zotrvačnosti je daný vzťahom (3.12) $I=\int r^{2}\mathrm{d}m$ (1), kde r je vzdialenosť hmotného elementu od osi otáčania. Tyč umiestnime na os x – ovú tak, aby os otáčania bola totožná s osou y – ovou. Za hmotný element dm si zvolíme časť dĺžky tyče dĺžky dx. Jeho vzdialenosť od osi otáčania označíme x (r = x). Ak predpokladáme, že tyč má zanedbateľný prierez, potom na výpočet hmotnosti hmotného elementu použijeme dĺžkovú hustotu

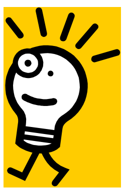
$$\tau=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}l}=\frac{m}{l}\,, \quad (2)$$

kde m a l sú hmotnosť a dĺžka tyče a dl = dx. Pre hmotný element

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{l}\mathrm{d}x\,. \quad (3)$$

Dosadením (2), (3) do (1) a úpravou

$$I=\int x^{2}\mathrm{d}m=\frac{m}{l}\int_{0}^{l}x^{2}\mathrm{d}x=\frac{m}{l}\left[\frac{x^{3}}{3}\right]_{0}^{l}=\frac{1}{3}ml^{2}\,.$$



Pri integrovaní sa posúvame hmotným elementom od jedného konca tyče na druhý koniec, preto integruje v hraniciach od 0 po l.

b) Ak os otáčania prechádza stredom tyče, potom na výpočet použijeme ten istý postup. Integrujeme v hraniciach od – $l/2$ po $l/2$

$$I = \int x^2 \mathrm{d}m = \frac{m}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 \mathrm{d}x = \frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \frac{1}{3}\frac{m}{l}\left(\frac{l^3}{8}+\frac{l^3}{8}\right) = \frac{1}{3}\frac{m}{l}2\frac{l^3}{8} = \frac{1}{12}ml^2$$

Pri počítaní sme mohli v tomto prípade použiť aj Steinerovu vetu (3.13).

Moment zotrvačnosti tyče je a) $I = \frac{1}{3}ml^2$ a b) $I = \frac{1}{12}ml^2$.

Príklad 3.5 Vypočítajte moment zotrvačnosti kruhovej dosky hmotnosti m = 2 kg a polomeru R = 10 cm vzhľadom na os prechádzajúcu a) stredom dosky kolmo na rovinu dosky a b) bodom vo vzdialenosti x = 5 cm od stredu dosky, kolmo na rovinu dosky. Hrúbku dosky zanedbajte.

m = 2 kg
R = 10 cm = 0,1 m

a) I_0 = ?
b) I_1 = ?, x = 5 cm = 0,05 m

Riešenie:

a) Na výpočet momentu zotrvačnosti použijeme opäť vzťah (3.12) $I = \int r^2 \mathrm{d}m$ (1).

Kruhovú dosku umiestnime do roviny xy, tak, aby os otáčania bola totožná s osou z – ovou, potom elementárnu hmotnosť telesa môžeme vyjadriť pomocou plošnej hustoty v tvare

$\mathrm{d}m = \frac{m}{S}\mathrm{d}S = \frac{m}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ (2), kde S je plocha kruhovej dosky , $r \in \langle 0, R\rangle$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Dosadením (2) do (1)

$$I_0 = \int r^2 \mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R^2}\int\int r^3 \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{m}{\pi R^2}\int_0^R r^3 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{m}{\pi R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{m}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}2\pi$$

$$I_0 = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}2.0{,}1^2 = 0{,}01 \mathrm{kgm}^2$$

b) Ak os otáčania prechádza bodom vo vzdialenosti x od stredu (ťažiska) kruhovej dosky potom podľa Steinerovej vety (3.13)

$$I_1 = I_0 + mx^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mx^2 = 0{,}01 + 2.0{,}05^2 = 0{,}015 \mathrm{kgm}^2.$$

Moment zotrvačnosti kruhovej dosky je a) $I_0 = 0{,}01 \mathrm{kgm}^2$ a b) $I_1 = 0{,}015 \mathrm{kgm}^2$.

Príklad 3.6 Vypočítajte moment zotrvačnosti dutého valca vzhľadom na jeho geometrickú os. Hmotnosť valca je m = 3,3 kg, výška valca je h, vnútorný a vonkajší polomer je R_1 = 0,12 m a R_2 = 0,23 m.

m = 3,3 kg
R_1 = 0,12 m
R_2 = 0,23 m
I = ?

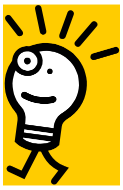
Riešenie:

Moment zotrvačnosti telesa vypočítame pomocou vzťahu

$$I = \int r^2 dm\,, \quad (1)$$

kde hmotnostný element dm je tvorený množinou bodov s rovnakou vzdialenosťou r od osi rotácie. V našom prípade je to súosový dutý valec polomeru $r \in \langle R_1, R_2 \rangle$ nekonečne malej hrúbky dr, pre ktorého hmotnosť platí

$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)h} h 2\pi r \mathrm{d}r\,. \quad (2)$$



Na výpočet hmotnosti hmotného elementu sme použili objemovú hustotu

$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \frac{m}{V}\,.$$

Potom dosadením (2) do (1)

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \frac{m}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)} 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{2m}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \int_{R_1}^{R_2} r^3 \mathrm{d}r = \frac{2m}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{m}{2}\left(R_2^2 + R_1^2\right).$$

Po číselnom dosadení

$$I = \frac{3{,}3}{2}\left(0{,}12^2 + 0{,}23^2\right) = 873\,\mathrm{kg.m}^2$$

Moment zotrvačnosti dutého valca je 873 kgm^2.

Príklad 3.7 Vagón naložený pieskom hmotnosti m_1 = 50 ton, sa pohybuje priamočiarym rovnomerným pohybom po vodorovnej rovine rýchlosťou v_1 = 5 m/s. Oproti nemu ide prázdny vagón hmotnosti m_2 = 20 ton rýchlosťou v_2 = 20 m/s. Po náraze sa vagóny spoja. Ako sa budú pohybovať po zrážke?

m_1 = 50 ton
m_2 = 20 ton
v_1 = 5 m/s
v_2 = 20 m/s
$v_3 = ?$

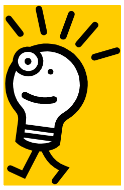
Riešenie:

Po zrážke sa vagóny spoja a vytvoria sústavu (jeden celok), ktorá bude mať hmotnosť $m = m_1 + m_2$ a rýchlosť $\vec{v}_3$. Na výpočet tejto rýchlosti, použijeme zákon zachovania hybnosti (3.9), podľa ktorého sa celková hybnosť sústavy pred zrážkou ($\vec{p}_1 + \vec{p}_2$) rovná celkovej hybnosti po zrážke ($\vec{p}_3$)

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3$.   (1)

Dosadením za hybnosti vagónov (vektor $\vec{p}_1$ predstavuje hybnosť prvého vagóna a vektor $\vec{p}_2$ hybnosť druhého vagóna pred zrážkou)

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_3. \quad (2)$$



Pri úprave vzťahu (2) využijeme poznatok, že vagóny sa pohybujú rovnomerným priamočiarym pohybom. Stačí uvažovať len veľkosti rýchlostí, preto rovnicu (2) zapíšeme bez vektorov (bez šípok). Súčasne zohľadníme fakt, že druhý vagón sa pohybuje opačným smerom ako prvý, pomocou znamienka mínus.

Úpravou rovnice (2)

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_3.$$

Odtiaľ pre hľadanú rýchlosť

$$v_3 = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{50000.5 - 20000.20}{50000 + 20000} = -2{,}14 \text{ m/s}.$$

Rýchlosť po zrážke vagónov je 2,14 m/s. Znamienko mínus znamená, že po zrážke sa vagóny budú pohybovať v smere pohybu prázdneho vagóna, teda opačným smerom ako sa pohybuje plný vagón.(Týmto príkladom sme odpovedali na otázku z úvodu kapitoly).

Príklad 3.8 Do akej výšky sa z rovnovážnej polohy vychýli matematické kyvadlo hmotnosti m_2 = 10 kg, keď v ňom uviazne strela hmotnosti m_1 = 100 g letiaca rýchlosťou v_1 = 200 m/s? Aké množstvo energie sa pri zrážke premení na teplo?

m_1 = 100 g = 0,1 kg
m_2 = 10 kg
v_1 = 200 m/s
v_2 = 0

---

h = ?
Q = ?

Riešenie:

Matematické kyvadlo a strela predstavujú sústavu dvoch bodov, pre ktorú platí zákon zachovania hybnosti (3.9) a zákon zachovania mechanickej energie. Po uviaznutí strely, sa sústava s hmotnosťou $m = m_1 + m_2$ bude pohybovať rýchlosťou v, pričom na začiatku predpokladáme, že daná sústava sa nachádza v nulovej výške (polohou strely je vedená nulová potenciálna hladina). Po vychýlení kyvadla do maximálnej výšky h jej rýchlosť klesne na 0. Na vyjadrenie výšky h, do ktorej sa sústava vychýli použijeme zákon zachovania energie

$$E_0 = E_1,$$

kde indexom nula je vyjadrená energia sústavy po zrážke so strelou a indexom jedna energia vo výške h. Celková energia je daná ako súčet kinetickej a potenciálnej energie

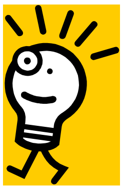
$$E_{\mathrm{k0}} + E_{\mathrm{p0}} = E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{p1}}, \quad (1)$$

kde $E_{\mathrm{k0}} = \frac{1}{2}mv^2$ (2), $E_{\mathrm{p1}} = mgh$ (3) a $E_{\mathrm{p0}} = E_{\mathrm{k1}} = 0\,\mathrm{J}$ (4).

Dosadením (2), (3), (4) do (1)

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgh$$

Odtiaľ pre výšku do ktorej sa kyvadlo sa vychýli $h = \frac{v^2}{2g}$. (5)



Rýchlosť, ktorá vystupuje vo vzťahu (5) je iná ako rýchlosť v_1, ktorú mala strela pred zrážkou. Rýchlosť strely sa po zrážke zmenší.

Rýchlosť v sústavy nepoznáme. Na jej určenie použijeme zákon zachovania hybnosti izolovanej sústavy

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3,$$

kde vektor $\vec{p}_1$ predstavuje hybnosť strely a vektor $\vec{p}_2$ hybnosť matematického kyvadla pred zrážkou a vektor $\vec{p}_3$ hybnosť sústavy strela + kyvadlo po zrážke. Potom dosadením za jednotlivé hybnosti

$$m_1 v_1 + m_2 0 = (m_1 + m_2)v$$

a úpravou pre rýchlosť sústavy po zrážke

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

Dosadením (6) do (5) pre výšku h

$$h = \frac{(m_1 v_1)^2}{2g(m_1 + m_2)^2} = \frac{(0{,}1.200)^2}{2.9{,}81(0{,}1+10)^2} = 0{,}2\,\mathrm{m}$$

Množstvo energie, ktoré sa premení na teplo v dôsledku práce odporovej sily pri zabrzdení strely v kyvadle je dané rozdielom kinetickej energie strely pred zrážkou a kinetickej energie kyvadla po zrážke

$$Q = W = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$Q = \frac{1}{2}0{,}1.200^2\left(1 - \frac{0{,}1}{0{,}1+10}\right) = 1980{,}2\ \mathrm{J}$$

Matematické kyvadlo sa vychýli do výšky 0,2 m. Množstvo energie, ktoré sa premení na teplo pri zrážke je 1980,2 J.

Príklad 3.9 Tyč hmotnosti m = 2 kg a dĺžky l = 1 m je uložená na vodorovnej osi prechádzajúcej jej koncovým bodom. Akou rýchlosťou prejde druhý koncový bod tyče svojou najnižšou polohou, keď tyč pustíme z najvyššej polohy?

m = 2 kg
l = 1 m

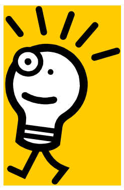
v_1 = ?

Riešenie:

Na vyjadrenie rýchlosti v najnižšej polohe použijeme zákon zachovania mechanickej energie. Zvoľme za nulovú potenciálnu hladinu vodorovnú rovinu prechádzajúcu osou otáčania. Vzhľadom na ňu pre potenciálnu energiu tyče v najvyššej polohe

$$E_{p0} = \int gx\mathrm{d}m = \frac{mg}{l}\int_0^l x\mathrm{d}x = \frac{mg}{l}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l = \frac{1}{2}mgl\,. \quad (1)$$

V najnižšej polohe $E_{\mathrm{p}1} = -\frac{1}{2}mgl\,.$ (2)



Tyč predstavuje teleso, ktoré má rovnomerne rozloženú hmotnosť pozdĺž svojej dĺžky. Preto na výpočet potenciálnej energie koncového bodu nemôžeme použiť vzťah, ktorý platí pre jeden bod ako to bolo v predchádzajúcom príklade, ale integrálny tvar, vzťah (1).

Tyč pri vychýlení zo svojej hornej polohy do dolnej vykonáva otáčavý pohyb, ktorého kinetická energia je daná vzťahom (3.11). V najvyššej polohe je tyč v pokoji $E_{\mathrm{k}0} = 0$ (3) a v najnižšej polohe $E_{\mathrm{k}1} = \frac{1}{2}I\omega_1^2$ (4), kde $I = \frac{1}{3}ml^2$ (5) je moment zotrvačnosti tyče, ak os prechádza koncovým bodom tyče (pozri príklad 3.4a).

Medzi uhlovou rýchlosťou ω a rýchlosťou v platí vzťah $v = \omega R$. V tomto prípade R = l potom pre uhlovú rýchlosť $\omega_1 = \frac{v_1}{l}$ (6).

Použitím zákona zachovania mechanickej energie

$E_0 = E_1$,

kde indexom nula je vyjadrená energia tyče v najvyššej polohe a indexom jedna energia v najnižšej polohe. Celková energia je daná ako súčet kinetickej a potenciálnej energie

$$E_{\mathrm{p}0} + E_{\mathrm{k}0} = E_{\mathrm{p}1} + E_{\mathrm{k}1}\,. \quad (7)$$

Dosadením (1) - (6) do (7)

$$\frac{1}{2}mgl + 0 = -\frac{1}{2}mgl + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\left(\frac{v_1}{l}\right)^2$$

a úpravou pre rýchlosť

$v_1 = \sqrt{6gl} = \sqrt{6.9{,}81.1} = 7{,}67\ \mathrm{m/s}$.

Rýchlosť, ktorou prejde druhý koncový bod tyče svojou najnižšou polohou je v_1 = 7,67 m/s.

Príklad 3.10 Homogénna kruhová doska polomeru R = 0,3 m a hmotnosti m = 60 kg sa otáča pod vplyvom momentu síl M = 0,1 Nm. Vypočítajte uhlové zrýchlenie a prácu vonkajších síl v čase t = 3 min, ak v čase t = 0 bola doska v pokoji. Moment zotrvačnosti kruhovej dosky vzhľadom na os otáčania je $I = \frac{1}{2}mR^2$ (1).

m = 60 kg
M = 0,1 Nm
R = 0,3 m

ε, W = ? .... t = 3 min

Riešenie:

Uhlové zrýchlenie kruhovej dosky vyjadríme z pohybovej rovnice telesa rotujúceho okolo pevnej osi (3.15)

$$M = \varepsilon I$$

$$\varepsilon = \frac{M}{I}\ , \qquad (2)$$

kde za moment zotrvačnosti dosadíme vzťah (1). Po úprave a číselnom dosadení

$$\varepsilon = \frac{2M}{mR^2} = \frac{2.0{,}1}{60.0{,}3^2} = 0{,}037\ \mathrm{s}^{-1}\ .$$

Prácu, ktorú vykonajú vonkajšie sily pri roztočení kruhovej dosky z pokoja vypočítame pomocou vety o kinetickej energii (3.19)

$$W = E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k\ , \quad (3)$$

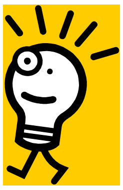
kde kinetická energia na začiatku je nulová a kinetická energia v čase 3 minúty je $E_{k1} = \frac{1}{2}I\omega_1^2$.

Dosadením do vzťahu (3)

$$W = \frac{1}{2}I\,\omega_1^2 - 0\ . \quad (4)$$

Uhlovú rýchlosť v čase 3 minúty vyjadríme pomocou uhlovej rýchlosti $\omega_1 = \varepsilon t_1$ a dosadíme do (4). Úpravou a použitím vzťahu (1)

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2(\varepsilon t_1)^2 = \frac{1}{4}60.0{,}3^2(0{,}037.180)^2 = 60\ \mathrm{J}\ .$$



Uhlové zrýchlenie dosky je 0,0037 s^{-1}*, je teda konštantné. Na základe tohto poznatku vieme aký pohyb doska vykonáva. V tomto prípade ide o rovnomerne zrýchlený otáčavý pohyb okolo pevnej osi.*

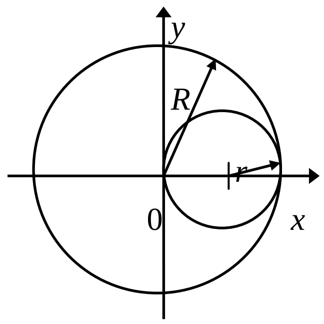
Uhlové zrýchlenie dosky v čase 3 minúty je 0,037 s^{-1} **a práca, ktorú vykonajú vonkajšie sily za tento čas je 60 J.**

Úlohy

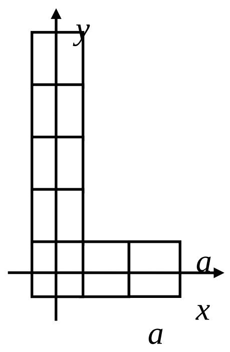
3.1 Z homogénnej kruhovej dosky s polomerom R vyrežeme kruh o polomere $r = R/2$ (obr. 3.3) medzi stredom kruhu a obvodom. Vypočítajte polohu ťažiska takéhoto útvaru.

$$\left[T = \left[-\frac{R}{6}; 0 \right] \right]$$

Pri riešení si pomôžte príkladom 3.2.



Obr. 3.3



Obr. 3.4

3.2 Sedem štvorcov o strane a = 1 cm zanedbateľnej hrúbky tvorí písmeno L (obr. 3.4). Vypočítajte súradnice jeho ťažiska.

$$[T = [0{,}43; 1{,}43] \text{cm}]$$

Inšpirujte sa príkladom 3.1, pričom nahraďte každý štvorec jeho ťažiskom a riešte úlohu ako sústavu 7 hmotných bodov.

3.3 Vypočítajte súradnice ťažiska:

a) drôtu polomeru R ohnutého do tvaru štvrťkružnice,

b) homogénnej polkruhovej dosky zanedbateľnej hrúbky s polomerom R,

c) homogénnej polgule s polomerom R,

d) homogénneho rovnoramenného trojuholníka so základňou 2a a výškou v.

$$\left[T = \left[\frac{2R}{\pi}; \frac{2R}{\pi} \right], T = \left[0; \frac{4R}{3\pi} \right], T = \left[0; 0; \frac{3R}{8} \right], T = \left[0; \frac{v}{3} \right] \right]$$

3.4 Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej tyče dĺžky l = 0,75 m a hmotnosti m = 2,7 kg vzhľadom na os kolmú na smer tyče:

a) prechádzajúcu stredom tyče,

b) prechádzajúcu koncovým bodom tyče,

c) prechádzajúcu tyčou vo vzdialenosti l/4 od jej konca.

d) O koľko treba predĺžiť tyč, aby sa jej moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom zdvojnásobil?

$$[I = 0{,}127 \text{ kgm}^2, I = 0{,}506 \text{ kgm}^2, I = \frac{7}{48} ml^2 = 0{,}222 \text{ kgm}^2, \Delta l = l\left(\sqrt{2} - 1\right) = 0{,}31 \text{m}]$$

Pri riešení vám môže pomôcť príklad 3.4.

3.5 Do telesa guľovitého tvaru, zaveseného zvisle na vlákne, narazí vodorovne letiaca strela, ktorej hmotnosť je 2000 – krát menšia ako hmotnosť telesa a uviazne v ňom. Aká bola rýchlosť strely pri náraze, keď sa teleso po náraze vychýlilo zo svojej rovnovážnej polohy tak, že záves zvieral so zvislým smerom uhol $\alpha = 15^0$? Dĺžka závesu od miesta upevnenia po stred gule je l = 1 m.

[v =1636,1 m/s]

3.6 Drevená homogénna tyč dĺžky l = 0,4 m a hmotnosti m = 1 kg sa môže otáčať okolo osi, ktorá je na tyč kolmá a prechádza jej stredom. Na koniec tyče narazí strela hmotnosti $m_1 = 10^{-2}$ kg letiaca rýchlosťou v_1 = 200 ms^{-1} v smere kolmom na os aj na tyč. Vypočítajte uhlovú rýchlosť, ktorou sa tyč dá do otáčavého pohybu, keď strela v nej uviazne.

[ω = 29,1 s^{-1}]

3.7 Krasokorčuliar sa otáča okolo zvislej osi so stálou frekvenciou 2 s^{-1}, pričom jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania je I_1 = 2 kgm^2. Ako sa zmení jeho uhlová rýchlosť otáčania, ak roztiahnutím rúk zväčší svoj moment zotrvačnosti na I_2 = 2,1 kgm^2?

[$\Delta\omega$ = -0,6 s^{-1}]

V úlohách 3.5 -3.7 použite niektoré zo zákonov zachovania hybnosti, momentu hybnosti a energie. Pozrite tiež riešenie príkladu 3.7 a príkladu 3.8.

3.8 Akou frekvenciou sa otáča tyč hmotnosti 1 kg dĺžky 0,2 m okolo osi, ktorá je kolmá na tyč a prechádza jej stredom, keď kinetická energia tyče je 1 J?

[f = 3,9 Hz]

3.9 Vypočítajte kinetickú energiu valca polomeru 6 cm a hmotnosti 2 kg v čase 3 s, keď sa otáča okolo osi vo vzdialenosti 2 cm od svojej geometrickej osi s konštantným uhlovým zrýchlením 0,4 s^{-2}. Uhlová rýchlosť valca na začiatku pohybu bola 0,1 s^{-1}. Moment zotrvačnosti valca vzhľadom na os prechádzajúcu jeho ťažiskom je $I = \frac{1}{2}mR^2$.

[E_k = 0,003718 J]

3.10 Loptička s priemerom d = 5 cm a hmotnosťou m = 0,1 kg sa kotúľa bez kĺzania po vodorovnej podložke s frekvenciou otáčania 4 Hz. Vypočítajte jej kinetickú energiu.

[E_k = 0,0276 J]

3.11 Homogénny rotačný valec s polomerom r a hmotnosťou m sa valí bez trenia po naklonenej rovine s uhlom sklonu α. Určte rýchlosť a zrýchlenie ťažiska valca po prejdení dráhy s, keď v čase t = 0 bol valec v pokoji.

[$v = 2\sqrt{\dfrac{gs\sin\alpha}{3}}$, $a = \dfrac{2}{3}g\sin\alpha$]

V týchto úlohách využite prie riešení vzťah (3.11) alebo (3.14) pričom si uvedomte aký typ pohybu vykonávajú telesá.

3.12 Homogénne teleso tvaru rotačného valca sa rovnomerne zrýchlene otáča okolo svojej geometrickej osi. Aký je moment vonkajších síl vzhľadom na os otáčania, keď sa hodnota momentu hybnosti telesa vzhľadom na os otáčania mení s časom rovnomerne tak, že za t_1 = 5 s vzrastie z nuly na hodnotu L_1 = 0,157 kgm^{2}s^{-1}?

[M = 0,00314 J]

3.13 Valec, ktorého moment zotrvačnosti vzhľadom na geometrickú os je 1000 kg.m^2 sa roztočí vplyvom síl, ktorých moment je 200 Nm. Aká je frekvencia otáčania valca od okamihu t = 60 s, keď v tomto okamihu vonkajšie sily prestali na valec pôsobiť.

[f = 1,91 Hz]

3.14 Kotúč hmotnosti 0,5 kg a priemeru 0,4 m koná 1500 otáčok za minútu. Pôsobením konštantného momentu brzdných síl sa zastaví za 20 sekúnd. Určte veľkosť momentu brzdných síl.

[M = 0,0785 Nm]

3.15 Koleso pri rovnomernom spomalenom pohybe zmenšilo svoju frekvenciu zo 4 Hz na 2 Hz za 2 s. Vypočítajte prácu síl trenia, ak moment zotrvačnosti kolesa je 2 kg.m^2. Aké bude spomalenie kolesa v tomto čase?

[W = 473,26 J]

3.16 Valec hmotnosti 209 kg s polomerom 0,1 m, sa má otáčať na sústruhu s konštantným uhlovým zrýchlením $\pi/4$ s^{-2}. Aký výkon musí vyvinúť motor sústruhu, ak má rozbeh trvať 5 s?

[P = 3,21 W]

Pri riešení v týchto úlohách použite vzťahy, ktoré platia pre teleso rotujúce okolo pevnej osi. Inšpirujte sa aj príkladom 3.10.

3.17 Štvorcová doska so stranou a = 20 cm kyve ako fyzikálne kyvadlo okolo osi, ktorá leží na jednej jej strane a prechádza ňou. Aká je perióda kmitov dosky? Moment zotrvačnosti dosky vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom je $I = \frac{1}{12} ma^2$.

[T = 7,32 s]

3.18 Priama homogénna tyč má dĺžku l = 1 m. Vypočítajte vzdialenosť od stredu tyče, v ktorej treba tyč upevniť, aby sa kývala ako fyzikálne kyvadlo s minimálnou periódou.

[x = 0,29 m]

3.19 Priemer tenkého krúžku možno zistiť aj stopkami. Krúžok zavesíme na vodorovnú ostrú hranu, necháme ho kývať v rovine krúžku a meriame čas. Pre 100 kyvoch sme namerali čas τ = 85 s. Vypočítajte priemer krúžku.

[d = 0,73 m]

Tieto úlohy sú zamerané na kyvadlá. Pokúste sa ich riešiť pomocou vzťahov (3.21) a (3.22) v kombinácii so Steinerovou vetou.