2 Dynamika hmotného bodu

Baseballová loptička hmotnosti 140 g letí tesne pred odpálením vodorovne rýchlosťou 39 m/s. Od pálky sa odrazí pod uhlom 30° rýchlosťou 45 m/s. Akou priemernou silou pôsobila pálka na loptičku, ak zrážka prebehla za 1,2 ms?

Základné pojmy:

hybnosť, druhý Newtonov pohybový zákon, sila, tiaž, impulz sily, veta o impulze a hybnosti, práca, kinetická energia, potenciálna energia, mechanická energia, zákon zachovania mechanickej energie

Dynamika je založená na troch základných princípoch, ktoré vyslovil v r. 1678 Isaac Newton. Tieto zákony tvoria základ teórie, pomocou ktorej je možné skúmať pohyby objektov, a odpovedať na otázku: *„Čo je príčinou pohybu telies?“*

V tejto časti sa budeme zaoberať predovšetkým druhým Newtonovým pohybovým zákonom, ktorý nám umožní riešiť úlohy spojené s pohybom telies. Budeme definovať príslušné fyzikálne veličiny a ukážeme ako riešiť úlohy z tejto problematiky. Všetky tieto poznatky budeme vzťahovať na hmotný bod, abstrakciu telesa, ktorého rozmery sú vzhľadom na ostatné rozmery, o ktorých sa pri danom pohybe uvažuje zanedbateľné.

Pohybový stav častice hmotnosti m pohybujúcej sa rýchlosťou $\vec{v}$ sa popisuje veličinou **hybnosť**, ktorá je daná

$$\vec{p} = m\vec{v} . \tag{2.1}$$

Jednotkou hybnosti je kilogram meter za sekundu, (p) = kg m/s.

Druhý Newtonov pohybový zákon hovorí, že sila pôsobiaca na hmotný bod je rovná časovej zmene jeho hybnosti.

Matematicky ho môžeme vyjadriť

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}), \tag{2.2}$$

čo v prípade konštantnej hmotnosti možno písať aj v tvare

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} . \tag{2.3}$$

Sila je rovná súčinu hmotnosti hmotného bodu a zrýchlenia, ktoré mu udelila. Jednotkou sily je newton, (F) = N.

Tiaž $\vec{G}$ je sila, ktorou pôsobí gravitačné pole Zeme na teleso hmotnosti m na povrchu Zeme a udelí mu zrýchlenie $\vec{g}$ (gravitačné zrýchlenie)

$$\vec{G} = m\vec{g} . \tag{2.4}$$

Časový účinok sily vyjadruje **impulz** sily

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t . \tag{2.5}$$

Impulz môžeme vyjadriť aj pomocou hybnosti:

Veta o impulze a hybnosti: Impulz je rovný zmene hybnosti častice, na ktorú sila pôsobí počas časového intervalu.

Matematické vyjadrenie tejto vety

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0, \tag{2.6}$$

kde $\vec{p}$ je hybnosť hmotného bodu na konci pôsobenia sily a $\vec{p}_0$ je hybnosť hmotného bodu na začiatku. Jednotkou impulzu je newtonsekunda, (I) = N.s.

Ak sila pôsobí na hmotný bod po určitej dráhe hovoríme, že koná prácu. **Práca** je dráhový účinok sily a je definovaná ako

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}.\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^s F\mathrm{d}s\cos\alpha\,, \tag{2.7}$$

kde $\mathrm{d}\vec{r}$ je vektor elementárneho posunutia, $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ sú polohové vektory počiatočného a koncového bodu trajektórie, na ktorej sila koná prácu, ds je veľkosť vektora $\mathrm{d}\vec{r}$ a α je uhol medzi vektormi sily a elementárneho posunutia. Jednotkou práce je joule, (W) = J.

Kinetická (pohybová) energia hmotného bodu

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2\,. \tag{2.8}$$

Jednotkou kinetickej energie je joule, (E_k) = J. Práca súvisí so zmenou kinetickej energie:

Veta o kinetickej energii hovorí, že práca, ktorú vykoná sila pôsobiaca na hmotný bod pozdĺž nejakej dráhy, sa rovná nárastu kinetickej energie hmotného bodu.

Jej matematické vyjadrenie je nasledovné

$$W = \Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2\,, \tag{2.9}$$

kde v je rýchlosť hmotného bodu na konci dráhy, kde pôsobila sila, a v_0 je rýchlosť na jej počiatku.

Výkon je práca vykonaná za jednotku času alebo skalárny súčin sily a rýchlosti pôsobiska sily

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F}.\vec{v}\,. \tag{2.10}$$

Jednotkou výkonu je watt, (P) = W.

Potenciálna energia v poli konzervatívnych síl sa počíta ako záporne vzatá práca týchto síl vykonaná pri prenesení častice z polohy 1 do polohy 2

$$E_p = -\int_1^2 \vec{F}.\mathrm{d}\vec{r}\ . \qquad (2.11)$$

V prípade, že uvažujeme túto energiu v gravitačnom poli Zeme, potom v malých výškach h nad zemou je **potenciálna (polohová) energia** vyjadrená

$$E_\mathrm{p} = mgh\ . \qquad (2.12)$$

Hodnotu tiažového zrýchlenia v príkladoch budeme uvažovať $g = 9{,}81\ m/s^2$.

Pod **mechanickou energiou** rozumieme súčet kinetickej a potenciálnej energie častice

$$E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p}. \qquad (2.13)$$

V poli konzervatívnych síl platí:

Zákon zachovania mechanickej energie, ktorý hovorí, že súčet kinetickej a potenciálnej energie častice je konštantný v čase.

Matematicky ho môžeme vyjadriť

$$E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = \text{konšt.} \qquad (2.14)$$

○ Riešené príklady

Príklad 2.1 V silovom poli sa pohybuje častica hmotnosti $m = 5$ kg po krivke s polohovým vektorom $\vec{r} = At^3\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$, kde $A = 1$ m.s^{-3}, $B = 5$ m.s^{-1}, $C = -3$ m. Určte hybnosť a silu ako funkcie času a ich veľkosti v časovom okamihu $t = 2$ s.

$m = 5$ kg
$\vec{r} = At^3\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$
$\underline{A = 1 \text{ m.s}^{-3},\ B = 5 \text{ m.s}^{-1},\ C = -3 \text{ m}}$
$p = \mathrm{f}(t) = ?,\ F = \mathrm{f}(t) = ?$
$p = ?,\ F = ?$ ……. $t = 2$ s

Riešenie:

Z definície hybnosti (2.1), kde rýchlosť podľa definície (1.2) vyjadríme ako deriváciu polohového vektora podľa času, dostaneme

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(At^3\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}\right) = m\left(3At^2\vec{i} + B\vec{j}\right). \quad (1)$$

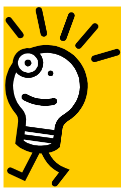
Silu vyjadríme z 2. Newtonovho pohybového zákona (2.2), do ktorého za hybnosť dosadíme vzťah (1)

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\left(3At^2\vec{i} + B\vec{j}\right)\right] = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(3At^2\vec{i} + B\vec{j}\right) = m\left(6At\vec{i}\right). \quad (2)$$

Hybnosť a sila vyjadrené ako funkcie času sú dané vzťahmi (1) a (2).

Pre veľkosti vektorov hybnosti a sily v čase 2 s

$$p(t = 2\,\mathrm{s}) = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{\left(3At^2m\right)^2 + \left(Bm\right)^2} = \sqrt{\left(3.1.2^2.5\right)^2 + \left(5.5\right)^2} = 65\ \mathrm{kg\ m/s}$$
$$F(t = 2s) = F_x = 6.5.2 = 60\ \mathrm{N}$$

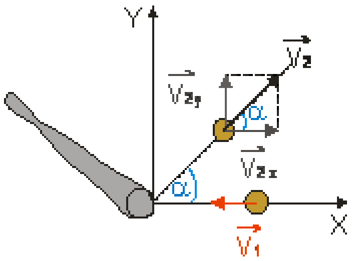


Na vyjadrenie veľkosti hybnosti a sily sme použili poznatok, že veľkosť vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ sa dá vyjadriť pomocou jeho súradníc v tvare $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Veľkosť hybnosti v časovom okamihu 2 s je 65 kg m/s a veľkosť sily 60 N.

Príklad 2.2 Baseballová loptička hmotnosti 140 g letí tesne pred odpálením vodorovne rýchlosťou 39 m/s. Od pálky sa odrazí pod uhlom 30° rýchlosťou 45 m/s. Akou priemernou silou pôsobila pálka na loptičku, ak zrážka prebehla za 1,2 ms?

m = 140 g
v_1 = 39 m/s
v_2 = 45 m/s
α = 30°
t = 1,2 ms
$\overline{F} = ?$



Obr. 2.1

Riešenie:

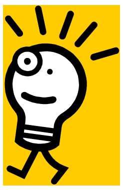
Označme rýchlosť loptičky pred odpálením v_1 = 39 m/s, po odpálení v_2 = 45 m/s a silu, ktorú chceme vypočítať $\overline{F}$, uhol pod ktorým sa loptička odrazila α = 30° a jej hmotnosť m = 140 g. Doba zrážky loptičky s pálkou je Δt = 1,2 ms. Na výpočet priemernej (nárazovej) sily použijeme vzťah (2.5), ktorý pre naše účely napíšeme v tvare $I = \overline{F}\Delta t$. Odtiaľ pre silu

$\overline{F} = \dfrac{I}{\Delta t}$ (1).

Aby sme mohli vypočítať premennú silu, musíme vedieť hodnotu impulzu a doby, za ktorú zrážka nastala. V našom prípade je impulz daný vektorovým tvarom $\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$, pretože sa mení smer rýchlosti resp. hybnosti po zrážke. Veľkosť impulzu je potom daný

$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$, (2)

kde veľkosti jednotlivých zložiek impulzu $\vec{I}_x = \vec{p}_{2x} - \vec{p}_{1x} = \Delta\vec{p}_x$, $\vec{I}_y = \vec{p}_{2y} - \vec{p}_{1y} = \Delta\vec{p}_y$, kde $\vec{p}_{1x} = m\vec{v}_{1x}$, $\vec{p}_{2x} = m\vec{v}_{2x}$, $\vec{p}_{1y} = m\vec{v}_{1z}$, $\vec{p}_{2y} = m\vec{v}_{2y}$.



Pri výpočte veľkosti impulzu bol použitý vzťah pre výpočet veľkosti vektora.

Podľa obr. 2.1 vzhľadom na zvolený súradnicový systém
$v_{1x} = -v_1$, $v_{1y} = 0$, $v_{2x} = v_2\cos\alpha$, $v_{2x} = v_2\sin\alpha$.

Potom pre veľkosť zložiek impulzu
$I_x = p_{2x} - p_{1x} = mv_{2x} - mv_{1x} = mv_2\cos\alpha + mv_1$ (3)
$I_y = p_{2y} - p_{1y} = mv_{2y} - mv_{1y} = mv_2\sin\alpha + m.0$ (4).

Dosadením (3), (4) do (2)

$$I = \sqrt{(mv_2\cos\alpha + mv_1)^2 + (mv_2\sin\alpha)^2} \quad (5)$$

a pre priemernú silu

$$\overline{F} = \frac{\sqrt{(mv_2\cos\alpha + mv_1)^2 + (mv_2\sin\alpha)^2}}{\Delta t}.$$

Použitím číselných hodnôt

$$\overline{F} = \frac{\sqrt{10{,}92^2 + 3{,}15^2}}{0{,}0012} = 9471{,}04\ \mathrm{N}$$

Priemerná sila, ktorou pálka pôsobila na loptičku pri zrážke je približne 9500 N.

Príklad 2.3 Určte prácu vykonanú silou $\vec{F} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 3\vec{k}$ (N), ktorej pôsobisko sa posúva po krivke $\vec{r} = t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 15t\vec{k}$ (m) v časovom intervale od t_1 = 1 s do t_2 = 5 s.

$\vec{F} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 3\vec{k}$ (1)

$\vec{r} = t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 15t\vec{k}$

W = ? .... t_1 = 1 s, t_2 = 5 s

Riešenie:

Využijeme definičný vzťah pre prácu (2.7)

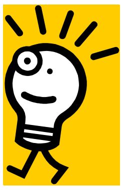
$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}.\mathrm{d}\vec{r} \quad (2),$$

pričom najprv vyjadríme elementárnu zmenu polohového vektora $\mathrm{d}\vec{r}$ ako deriváciu polohového vektora podľa času

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 15t\vec{k})}{\mathrm{d}t} = \vec{i} + 4t\vec{j} + 15\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{r} = \left(\vec{i} + 4t\vec{j} + 15\vec{k}\right)\mathrm{d}t. \ (3)$$

Dosadením (1) a (3) do výrazu pre prácu (2)

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}.\mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left(3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 3\vec{k}\right).\left(\vec{i} + 4t\vec{j} + 15\vec{k}\right)\mathrm{d}t. \ (4)$$



Zložkový tvar skalárneho súčinu dvoch vektorov:

$$\vec{a}.\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right).\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Urobíme skalárny súčin uvedených dvoch vektorov v zložkovom tvare a integrujeme cez daný časový interval, čím získame veľkosť práce

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (3t^2 + 8t^2 + 45)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{11t^3}{3} + 45t \right]_1^5 = 635\,\mathrm{J}$$

Práca vykonaná silou v danom časovom intervale je 635 J.

Príklad 2.4 Vlak idúci rýchlosťou v_{01} = 60 km.h^{-1} sa zastaví na dráhe s_1 = 400 m. Akú rýchlosť by mal vlak, keby sa rovnakou brzdnou silou zastavil na dráhe s_2 = 100 m?

v_{01} = 60 km.h^{-1},
s_1 = 400 m = 0,4 km.h^{-1},
s_2 = 100 m = 0,1km.h^{-1},
v_2 = ?, $F_1 = F_2$

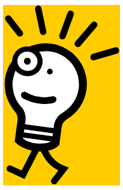
Riešenie:

Na vyjadrenie závislosti dráhy od rýchlosti pre prvý vlak použijeme vetu o kinetickej energii (2.9)

$$W_1 = E_{k1} - E_{k01}, \quad (1)$$

kde W_1 je práca sily F_1, ktorú vykoná pri zabrzdení vlaku na dráhe s_1. Kinetická energia E_{k1} vlaku na konci pôsobenia sily je nulová (teda v okamihu kedy sa zastaví, rýchlosť je tiež nulová), E_{k01} je jeho kinetická energia na začiatku pôsobenia sily, keď mal pôvodnú rýchlosť v_{01}. Práca sily F_1, ktorá pôsobí proti pohybu a je konštantná sa dá vyjadriť pomocou integrálu v tvare

$$W_1 = \int_0^{s_1} F_1 \mathrm{d}s \cos\alpha = -F_1 \int_0^{s_1} \mathrm{d}s = -F_1 s_1 \quad (2)$$



Vo vzťahu (2) sme využili, že sila brzdila pohyb vlaku, preto pri sile je znamienko – .

Dosadením (2) do (1) pre prvý vlak

$$-F_1 s_1 = 0 - \frac{1}{2} m v_1^2,$$

úpravou

$$F_1 s_1 = \frac{1}{2} m v_1^2. \quad (3)$$

Analogicky pre druhý vlak bude

$$F_2 s_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 . \quad (4)$$

Keďže z počiatočných podmienok platí $F_1 = F_2$, predelením rovníc (4) a (3) dostaneme

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} ,$$

pre hľadanú rýchlosť

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} = 60 \sqrt{\frac{0{,}1}{0{,}4}} = 30 \text{ km.hod}^{-1}$$

Rýchlosť vlaku, ktorý by sa zastavil rovnakou brzdnou silou na dráhe 100 m, by bola 30 km.hod^{-1} .

Príklad 2.5 Guľa, preraziac dosku hrúbky h, zmenila svoju rýchlosť z v_0 na v_1. Určte dobu prechodu gule doskou, ak uvažujeme, že sila odporu je úmerná kvadrátu rýchlosti.

h

v_0 .... v_1

$\underline{F = \mathrm{f}\,(v^2)}$

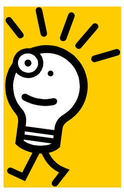
$t = ?$

Riešenie:

Zo zadania vyplýva, že sila odporu pôsobí proti pohybu a je úmerná druhej mocnine rýchlosti, potom $F = - kv^2$ (1), kde k je konštanta úmernosti.

Na určenie doby, za ktorú guľa prerazí dosku použijeme vzťah pre silu (2.2), ktorý upravíme na tvar

$$F\mathrm{d}t = m\mathrm{d}v . \quad (2)$$



Vo vzťahu (2) predpokladáme, že vektory rýchlosť a sila ležia v jednej priamke, preto stačí vzťah (2) písať bez šípok – vektorov.

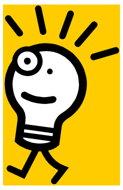
Po dosadení do (2) za silu (1)

$$-kv^2\mathrm{d}t = m\mathrm{d}v . \quad (3)$$

Rovnica (3) predstavuje diferenciálnu rovnicu, ktorú upravíme tak, aby ľavá strana rovnice závisela iba od času a pravá od rýchlosti

$$-\frac{k}{m}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{v^2} \qquad (4)$$

a budeme integrovať



Konštanta úmernosti a hmotnosť vo vzťahu (4), sú konštanty, vyberieme ich pred integrál.

$$-\frac{k}{m}\int_0^t \mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v_1} \frac{\mathrm{d}v}{v^2},$$

kde t je doba prechodu gule doskou.

Výpočtom dostaneme

$$\left[-\frac{k}{m}t\right]_0^t = \left[-\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v_1}$$

a po dosadení hraníc

$$-\frac{k}{m}t = -\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_0} \; .$$

Odkiaľ po úprave pre dobu prechodu gule doskou získame vzťah

$$t = \frac{m}{k}\frac{v_0 - v_1}{v_0 v_1}, \qquad (5)$$

v ktorom ešte bude treba určiť konštantu k.

Určíme ju pomocou vety o kinetickej energii (2.9), ktorú vyjadríme v diferenciálnom tvare

$$F\mathrm{d}s = \mathrm{d}E_\mathrm{k} \, . \qquad (6)$$

Dosadením (1) do (6)

$$-kv^2\mathrm{d}s = mv\mathrm{d}v \, .$$

Úpravou rovnice a integrovaním

$$\int_0^h -k\mathrm{d}s = m\int_{v_0}^{v_1}\frac{\mathrm{d}v}{v}\,,$$

dostávame

$$-kh = m\ln\frac{v_1}{v_0}\ .$$

Odkiaľ pre konštantu

$$k = \frac{m}{h}\ln\frac{v_0}{v_1}\,. \quad (7)$$

Dosadením (7) do (5) pre dobu prechodu gule doskou

$$t = \frac{m}{\frac{m}{h}\ln\frac{v_0}{v_1}}\frac{v_0 - v_1}{v_0 v_1} = \frac{h}{v_0 v_1 \ln\frac{v_0}{v_1}}\left(v_0 - v_1\right) \quad (8)$$

Doba prechodu gule doskou je daná vzťahom (8).

○ Úlohy

2.1 Teleso sa dáva do pohybu pôsobením sily F = 0,02 N a za prvé štyri sekundy svojho pohybu prejde dráhu 3,2 m. Aká veľká je jeho hmotnosť a akú rýchlosť má na konci piatej sekundy svojho pohybu?

[m = 0,05 kg , v = 2 $m.s^{-1}$]

2.2 Železničný vozeň sa pohybuje po vodorovnej priamej trati a brzdíme ho silou, ktorá sa rovná 0,1 tiaže vozňa. Vypočítajte čas meraný od začiatku brzdenia, za ktorý sa vozeň zastaví, ako aj dráhu, ktorú prejde od začiatku brzdenia až do zastavenia, ak v okamihu, keď sa začalo brzdiť, mal vozeň rýchlosť v_0 = 72 kmh^{-1}.

[t = 20,4 s, s = 204 m]

Pri riešení použite vzťahy (2.3) a (2.4).

2.3 Teleso hmotnosti 2 kg sa pohybuje pozdĺž osi X tak, že jeho dráha je vyjadrená rovnicou $x = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$, kde A = 0,5 m a ω = 2 s^{-1}. Vyjadrite veľkosť sily F pôsobiacej na teleso ako funkciu polohy a času. V ktorom mieste a v akom čase je veľkosť sily nulová?

[$F(x,t) = -mA\omega^2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$, $F(x = 0) = 0$, $t = \frac{\pi}{\omega}\left(k + \frac{1}{6}\right)$ k je celé číslo]

Pri riešení si pomôžte príkladom 2.1.

2.4 Určte maximálnu rýchlosť, ktorú dosiahne voľne pustené teleso guľového tvaru polomeru r = 8 cm a hmotnosti m = 10 kg pri svojom páde, ak pre odpor vzduchu platí vzťah: $R = k\sigma v^2$, pritom v je rýchlosť telesa, σ je plošný obsah priemetu telesa na rovinu kolmú na smer pohybu, k = 0,235 Ns^2m^{-4}.

[v_{max} = 144 $m.s^{-1}$]

2.5 Guľôčka s hmotnosťou m, ktorej bola udelená rýchlosť v_0, sa pohybuje v prostredí, ktorého odpor proti pohybu rastie lineárne s rýchlosťou hmotného bodu. Akú dráhu až do zastavenia guľôčka prejde, keď okrem odporu prostredia nepôsobí na ňu žiadna sila.

[$s = \frac{mv_0}{k}$]

Túto úlohu riešte pomocou príkladu 2.5.

2.6 Pri rozbiehaní motorového vozidla z pokoja pôsobí sila, ktorá je nepriamo úmerná rýchlosti, t.j. $F = k/v$, kde k je konštanta. Vypočítajte: závislosť rýchlosti vozidla od času, závislosť jeho zrýchlenia od času a závislosť dráhy od času.

2.7 Zdvihák výťahu naloženého materiálom s celkovou hmotnosťou m = 1000 kg sa dvíha s konštantným zrýchlením I = 2 $m.s^{-2}$. Vypočítajte prácu, ktorá sa vykoná za prvých 5 sekúnd zdvihu.

[W = 295,25 kJ]

2.8 Ťažná sila motora automobilu, ktorý sa pohybuje priamočiaro, sa mení so vzdialenosťou od miesta štartu podľa vzťahu $F = A + Bx$, kde A = 1000 N, B = 500 Nm^{-1}. Určte prácu sily na dráhe 1000 m od miesta štartu.

[$W = 251.10^6$ J]

2.9 Oceľová špirála dĺžky l_0 = 80 cm sa predĺži silou F_1 = 20 N o dĺžku x_1 = 5 cm. Aká práca je potrebná na predĺženie špirály na dvojnásobok jej pôvodnej dĺžky, ak sila konajúca prácu je úmerná predĺženiu špirály?

[W = 128 J]

2.10 Chlapec pri streľbe z gumipušky natiahol gumu tak, že sa predĺžila o 0,1 m. Ak by pôsobil silou F_1 = 10 N, guma by sa predĺžila o x_1 = 0,01 m. Akou rýchlosťou vyletel z praku kameň hmotnosti 20 g?

[v = 22,4 m.s^{-1}]

V úlohe 2.10 si pomôžte príkladom 2.4.

2.11 Teleso hmotnosti 1 kg sa pohybuje po priamke rýchlosťou v_0 = 20 m.s^{-1}. V určitom okamihu začne na teleso pôsobiť sila $F = k/v$. Za aký čas od tohto okamihu narastie rýchlosť telesa na $3v_0$? Akú prácu vykonala sila za tento čas?

[t = 2000 s, W = 1600 J]

2.12 Ťažná sila motora auta, ktoré sa pohybuje po priamke, sa mení so vzdialenosťou od štartu podľa vzťahu $F = (500 + 750x)$ N. Vypočítajte prácu tejto sily na dráhe 1 km od štartu.

[W = 3,75 MJ]

2.13 Sila $F = 6t$ (N) pôsobí na teleso, ktorého hmotnosť je 2 kg. Ak bolo teleso na začiatku v pokoji, vypočítajte prácu sily a kinetickú energiu telesa po 2 s.

[W = 36 J = E_k]

2.14 Akú prácu vykoná sila, ktorá pohybuje telesom hmotnosti 10 kg nahor po naklonenej rovine dĺžky 3 m s uhlom sklonu 30^o, ak na počiatku naklonenej roviny bola rýchlosť v_0 = 1 m.s^{-1} a na konci v = 3 m.s^{-1}. Trenie zanedbajte.

[W = 187,1 J]

2.15 Veľkosť sily pôsobiacej na teleso o hmotnosti m = 14,6 kg je $F = A + Bt$, kde A = 10 N, B = 2 Ns^{-1}. Vypočítajte hodnotu impulzu v čase t = 2 s, ak na začiatku bola rýchlosť nulová.

[I = 24 Ns, v = 4,6 ms^{-1}]

2.16 Lopta hmotnosti 200 g dopadá na stenu rýchlosťou v_1 = 5 ms^{-1} pod uhlom 60^o ku normále. Od steny sa odrazí bez straty rýchlosti (pružná zrážka). Doba trvania nárazu na stenu je 0,05 s. Vypočítajte priemernú hodnotu sily, ktorá pôsobila na loptu pri náraze.

[F_p = 20 N]

Pomôžte si príkladom 2.2.

2.17 Teleso bolo vyhodené zvislo nahor rýchlosťou 20 m.s^{-1}. V akej výške sa jeho kinetická energia rovná potenciálnej?

[h = 10,19 m]

2.18 Teleso vrhneme určitou rýchlosťou v_0 zvislo nahor. Vo výške 30 m sa jeho kinetická energia rovná 1/3 potenciálnej energie vztiahnutej na zemský povrch. Vypočítajte maximálnu výšku, ktorú teleso dosiahne, a rýchlosť v_0. Odpor vzduchu zanedbajte.

[h_{max} = 40 m, v_0 = 28,3 m.s^{-1}]

2.19 Akú ťažnú silu môže teoreticky maximálne vyvinúť rušeň s výkonom P = 2500 kW pri pohybe rýchlosťou v = 60 km.h^{-1}?

[$F = 1,5.10^5$ N]

2.20 Vypočítajte výkon motora nákladného auta, ktoré sa pohybuje stálou rýchlosťou v = 30 km.h^{-1} po ceste s 5 % stúpaním, keď hmotnosť auta m = 5000 kg. Trenie zanedbajte.

[P = 20,5 kW]