1 Kinematika hmotného bodu

Medzi najväčšie a najrýchlejšie horské dráhy na svete patrí dráha, ktorú otvorili v meste Jackson v americkom štáte New Jersey. Stavba atrakcie stála 13 miliónov libier (asi 572 miliónov korún), na ktorej sa pasažieri ocitnú vo výške asi 140 metrov za 3,5 sekundy. Čo pociťujú pasažieri pri jazde a je vôbec bezpečná?

Základné pojmy:

polohový vektor, rýchlosť, zrýchlenie, tangenciálne zrýchlenie, normálové zrýchlenie, uhlová rýchlosť, uhlové zrýchlenie, frekvencia, perióda

Kinematika hmotného bodu sa zaoberá jednoznačným matematickým popisom pohybu. Hmotný bod je teleso, ktoré má pôvodnú hmotnosť telesa, ale jeho rozmery sa zanedbávajú. Je to abstrakcia, ktorá umožňuje ľahšie popísať pohyb telies.

V tejto kapitole budeme popisovať dva druhy pohybov - posuvný a otáčavý (krivočiary), pre ktoré zadefinujeme potrebné veličiny a ukážeme ako riešiť príklady na tieto pohyby.

Polohový vektor, je vektor, ktorého počiatok sa nachádza v mieste vzťažného bodu a koncový bod je v mieste okamžitej polohy daného bodu.

Ak je počiatok pravouhlej súradnicovej sústavy v mieste vzťažného bodu, možno polohový vektor vyjadriť vzťahom

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \,, \tag{1.1}$$

kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sú konštantné **jednotkové vektory**, ktorých veľkosť je jedna a sú orientované pozdĺž súradnicových osí v smere ich kladnej orientácie.

Okamžitá rýchlosť je definovaná ako prvá derivácia polohového vektora podľa času

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \,. \tag{1.2}$$

Okamžité zrýchlenie je definované ako prvá derivácia rýchlosti podľa času alebo ako druhá derivácia polohového vektora podľa času

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \,. \tag{1.3}$$

Veličiny polohový vektor, okamžitá rýchlosť a okamžité zrýchlenie slúžia na popis posuvného pohybu.

Polomer krivosti priestorovej krivky R je daný vzťahom

$$\frac{1}{R} = \frac{|\mathrm{d}\vec{\tau}|}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} \,, \tag{1.4}$$

kde $\vec{\tau}$ je jednotkový vektor tangenciálny k danej krivke.

Tangenciálne zrýchlenie vyjadruje zmenu veľkosti rýchlosti pri krivočiarom pohybe

$$\vec{a}_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} \,. \tag{1.5}$$

Normálové zrýchlenie vyjadruje zmenu smeru rýchlosti

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}, \tag{1.6}$$

kde $\vec{n} \perp \vec{\tau}$ je jednotkový vektor.

Celkové zrýchlenie pri krivočiarom pohybe

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}\,. \tag{1.7}$$

Na popis otáčavého pohybu slúžia analogické veličiny ako pri posuvnom pohybe: polohový uhol, uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie. Tieto veličiny sú definované rovnako ako pri posuvnom pohybe.

Polohový uhol $\vec{\varphi}$ slúži na určenie polohy hmotného bodu pri otáčavom pohybe. Jeho vektor je kolmý na rovinu, v ktorej sa tento uhol vytvára. Jeho veľkosť (absolútna hodnota) sa rovná veľkosti tohto uhla. Vektor uhla je orientovaný tým smerom, odkiaľ sa jeho vytváranie javí proti smeru pohybu hodinových ručičiek.

Uhlová rýchlosť je definovaná ako prvá derivácia polohového uhla podľa času

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.8}$$

kde $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ je vektor elementárneho uhla opísaného polohovým vektorom (sprievodičom) za elementárny časový interval dt.

Uhlové zrýchlenie je definované ako prvá derivácia uhlovej rýchlosti podľa času alebo ako druhá derivácia polohového uhla podľa času

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{1.9}$$

Otáčavý pohyb v rovine je pohyb, pri ktorom všetky tri vektory - $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ ležia na spoločnej priamke, ktorá je kolmá na rovinu pohybu a na popis pohybu potom stačia skalárne veličiny φ, ω, α.

Pre uhlovú rýchlosť uhlové zrýchlenie **otáčavého pohybu v rovine**

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{1.10}$$

Priamočiary pohyb je pohyb pri ktorom polohový vektor, vektory rýchlosti a zrýchlenia ležia v jednej priamke, (napr. sa teleso pohybuje po priamke, pozdĺž jednej súradnicovej osi).

Na popis priamočiareho pohybu stačia dve skalárne rovnice

$$v = \int a(t)\, dt \quad , \quad s = \int v(t)\, dt\,, \tag{1.11}$$

kde v je rýchlosť a s je poloha hmotného bodu v časovom okamihu t.

Ak je zrýchlenie telesa nulové, ide o **priamočiary rovnomerný pohyb** popísaný rovnicami

$$v = v_0, \quad s = v_0 t + s_0\,. \tag{1.12}$$

Ak je zrýchlenie hmotného bodu konštantné $a =$ konšt., $a \neq 0$, ide o **priamočiary rovnomerne zrýchlený pohyb**, ktorý možno popísať rovnicami

$$v = at + v_0 \quad , \quad s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0\,. \tag{1.13}$$

Súvis medzi veľkosťami obvodovej a uhlovej rýchlosti

$$v = r\omega\,. \tag{1.14}$$

Tangenciálne zrýchlenie

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha\,. \tag{1.15}$$

Normálové zrýchlenie

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2\,. \tag{1.16}$$

Perióda alebo **doba obehu**

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\,. \tag{1.17}$$

Frekvencia

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{1.18}$$

Ak je závislosť uhlového zrýchlenia od času známa, možno určiť závislosť uhlovej rýchlosti od času

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \omega = \int \alpha(t)\,\mathrm{d}t \cdot \tag{1.19}$$

Analogickým spôsobom možno zo známej závislosti uhlovej rýchlosti pohybujúceho sa telesa od času odvodiť závislosť uhlovej dráhy od času

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \varphi = \int \omega(t)\,\mathrm{d}t \cdot \tag{1.20}$$

Ak je uhlové zrýchlenie hmotného bodu konštantné ω = konnš., $\omega \neq 0$, hovoríme o **rovnomernom zrýchlenom (spomalenom) pohybe po kružnici.** Pohyb možno popísať rovnicami

$$\omega = \pm\alpha t + \omega_0, \quad \varphi = \pm\frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0, \tag{1.21}$$

kde ω_0 a φ_0 sú uhlová rýchlosť a uhol v čase t = 0.

Ak je uhlové zrýchlenie hmotného bodu nulové, teleso sa pohybuje po kružnici **rovnomerným pohybom** popísaný rovnicami

$$\omega = \omega_0 \ , \ \varphi = \omega_0 t + \varphi_0, \tag{1.22}$$

kde ω_0 a φ_0 sú uhlová rýchlosť a uhol v čase t = 0.

Počet otáčok, ktoré urobí hmotný bod pri otáčavom pohybe za určitý časový interval je

$$N = \frac{2\pi}{\varphi}, \tag{1.23}$$

kde φ je dráha (uhol), ktorý za túto dobu prejde.

○ Riešené príklady

Príklad 1.1 Pohyb bodu je určený rovnicami: $x = A_1t^2 + B_1$, $y = A_2t^2 + B_2$, kde $A_1 = 20$ cms^{-2}, $B_1 = 5$ cm, $A_2 = 15$ cms^{-2}, $B_2 = -3$ cm. Vypočítajte veľkosť a smer rýchlosti a zrýchlenia v čase $t_1 = 2$ s a určte rovnicu dráhy jeho pohybu.

$x = A_1t^2 + B_1$ (1)
$y = A_2t^2 + B_2$ (2)
$A_1 = 20$ cms^{-2}, $B_1 = 5$ cm,
$A_2 = 15$ cms^{-2}, $B_2 = -3$ cm

$v = ?$, $a = ?$ ……. $t = 2$ s

Riešenie:

Hmotný bod vykonáva pohyb v rovine a súradnicami x, y je určený jeho polohový vektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}\,, \quad (3)$$

kde súradnice x a y sú dané vzťahmi (1) a (2).Vektor rýchlosti vypočítame pomocou vzťahu (1.2) ako deriváciu polohového vektora (3) podľa času

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} = 2A_1t\vec{i} + 2A_2t\vec{j}\,, \quad (4)$$

kde $2A_1t = v_x$, $2A_2t = v_y$.

Vektor zrýchlenia je daný vzťahom (1.3) ako derivácia vektora rýchlosti (4) podľa času

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} = 2A_1\vec{i} + 2A_2\vec{j}\,.$$

Na výpočet veľkosti vektorov použijeme vzťahy

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2t\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \Rightarrow v = \text{konšt.}t\,,$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \text{konšt.}.$$

Smer vektora $\vec{v}$ možno charakterizovať uhlom medzi osou x a týmto vektorom a vypočítať ho zo vzťahu pre smerové kosíny.

$$\cos\alpha_v = \frac{v_x}{v} = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \Rightarrow \alpha_v = \arccos\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$. Analogicky pre smer vektora zrýchlenia

$$\cos\alpha_a = \frac{a_x}{a} = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \Rightarrow \alpha_a = \arccos\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$v = 1\,\mathrm{ms}^{-1},\ a = 0{,}5\,\mathrm{ms}^{-2}, \cos\alpha_v = \cos\alpha_a \Rightarrow \alpha_v = \alpha_a = 36.9\,°\,.$$

Veľkosť rýchlosti v časovom okamihu 2 s je 1 m/s a veľkosť zrýchlenia 0,5 m/s^2. Smer rýchlosti a zrýchlenia je daný uhlom 36,9 ° .

Smer vektorov $\vec{v}$ a $\vec{a}$ sa v čase nemení, hmotný bod sa teda pohybuje v rovine po priamke.

Môžeme sa o tom presvedčiť odvodením rovnice dráhy jeho pohybu, teda určením rovnice krivky $y = f(x)$, po ktorej sa hmotný bod v rovine pohybuje.

Z rovnice (1) vyjadríme $t^2 = \dfrac{x - B_1}{A_1}$ a dosadíme do rovnice (2). Úpravou dostaneme rovnicu priamky $y = \dfrac{A_2}{A_1}x - \dfrac{A_2}{A_1}(B_2 - B_1) = kx + q$,kde $k = \dfrac{A_2}{A_1}$ a $q = \dfrac{A_2}{A_1}(B_2 - B_1)$ sú parametre priamky. Hmotný bod sa pohybuje po priamke. Veľkosť jeho zrýchlenia je konštantná a jeho rýchlosť v čase lineárne rastie, z čoho môžeme usúdiť, že bod vykonáva rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb.

Príklad 1.2 Bod sa pohybuje po krivke $y = \ln x$ konštantnou rýchlosťou v_0. Aké je jeho zrýchlenie v ľubovoľnom mieste dráhy.

$y = \ln x$

v_0

$a = ?$

Riešenie:

Pre veľkosť rýchlosti v každom okamihu platí $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. (1)

Súradnice rýchlosti vyjadríme zo vzťahov

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad (2) \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x}v_x \quad (3)$$

a dosadíme do (1)

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + \frac{v_x^2}{x^2}} = v_x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{v_x}{x}\sqrt{1 + x^2} \ . \quad (4)$$

Pre x - ovú súradnicu rýchlosti úpravou vzťahu (4)

$$v_x = \frac{x v_0}{\sqrt{1 + x^2}} \ . \quad (5)$$

A pre y - ovú súradnicu rýchlosti použitím (1) a (5)

$$v_y = \sqrt{v_0^2 - v_x^2} = \sqrt{v_0^2 - \frac{x^2 v_0^2}{1+x^2}} = v_0\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}} = v_0\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Derivovaním súradníc rýchlosti vyjadríme súradnice zrýchlenia. Pre x - ovú súradnicu zrýchlenia

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}v_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{xv_0}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{xv_0}{\sqrt{1+x^2}} = v_0\frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\frac{xv_0}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$a_x = v_0\frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{xv_0}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{xv_0^2}{\left(1+x^2\right)^2}. \quad (6)$$

Pre y - ovú súradnicu zrýchlenia

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}x}v_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v_0}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{xv_0}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$a_y = -\frac{1}{2}\frac{2xv_0}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{xv_0}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x^2v_0^2}{\left(1+x^2\right)^2}. \quad (7)$$

Pre veľkosť celkového zrýchlenia použitím (6) a (7)

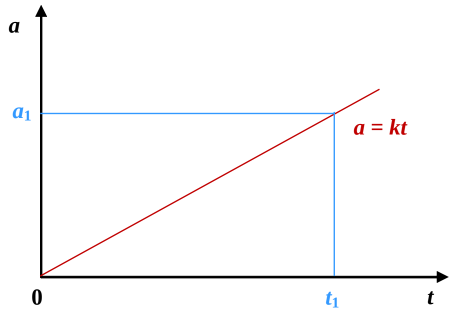
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{xv_0^2}{\left(1+x^2\right)^2}\sqrt{1+x^2} = \frac{xv_0^2}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (8)$$

Zrýchlenie bodu v ľubovoľnom mieste dráhy je dané vzťahom (8).

Príklad 1.3 Auto sa rozbieha z pokoja s rovnomerne rastúcim zrýchlením tak, že v čase t_1 = 10 s má hodnotu a_1 = 0,4 ms^{-2}. Akú rýchlosť má auto v čase t_2 = 20 s a akú dráhu za ten čas prešlo?

t_1 = 10 s .... a_1 = 0,4 ms^{-2}

v = ? s = ? ...... t_2 = 20 s



Obr. 1.1

Riešenie:

Závislosť zrýchlenia na čase možno popísať graficky tak, ako je na obr. 1.1, teda závislosť je lineárna a platí $a = k.t$ (1), kde k je konštanta.

Súvis rýchlosti a zrýchlenia popisuje vzťah (1.3)

$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, ktorý pre priamočiary pohyb má tvar $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Jeho úpravou dostaneme rovnicu

$$\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t,$$

ktorú integrujeme

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t a\mathrm{d}t,$$

pričom za zrýchlenie dosadíme vzťah (1) a dostaneme rovnicu

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t kt\mathrm{d}t.$$

Jej integráciou pre rýchlosť

$$v = v_0 + k\frac{t^2}{2},$$

v ktorom počiatočná rýchlosť v_0 je nulová, pretože auto sa rozbieha z pokoja. Platí teda, že závislosť rýchlosti na čase je kvadratická a má tvar

$$v = k\frac{t^2}{2}. \quad (2)$$

Súvis dráhy a rýchlosti pre priamočiary pohyb popisuje vzťah

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

z ktorého po úprave dostaneme rovnicu

$$s = \int_0^t v\mathrm{d}t, \quad (3)$$

kde v nie je veličina v čase konštantná, ale popisuje ju vzťah (2).

Dosadením (2) do (3) rovnica pre dráhu

$s = \int_0^t k\frac{t^2}{2}\mathrm{d}t$ a po integrácii $s = k\frac{t^3}{6}$. (4)

Konštantu k v rovnici (4) a (2) určíme z počiatočných podmienok, že v čase t_1 má auto zrýchlenie a_1

$$k = \frac{a_1}{t_1}.$$

Po dosadení číselných hodnôt $k = 4.10^{-2}\,\mathrm{ms}^{-3}$, $v = 8\,\mathrm{ms}^{-1}$, $s = 53{,}33\,\mathrm{m}$.

Auto má v čase 20 s rýchlosť 8 m/s a za tento časový interval prešlo dráhu 53,33 m.

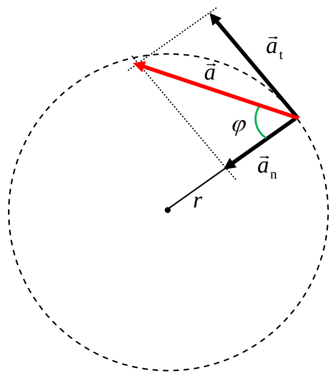
Príklad 1.4 Koleso polomeru R = 10 cm sa otáča tak, že pre body na jeho obvode platí $v = At + Bt^2$, A = 3cms^{-2}, B = 1cms^{-3}.Určte uhol, ktorý zviera vektor celkového zrýchlenia s polomerom v čase t_1 = 1 s

R = 10 cm

$v = At + Bt^2$

A = 3cm.s^{-2}, B = 1cm.s^{-3}

φ_1 = ?



Obr. 1.2

Riešenie:

Situácia je znázornená na obr. 1.2 odkiaľ platí

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}{\frac{v^2}{R}} = R\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(At + Bt^2\right)}{v^2} = R\frac{A + 2Bt}{\left(At + Bt^2\right)^2},$$ kde z tangenciálne zrýchlenie sme dosadili vzťah (1.15) a za normálové zrýchlenie vzťah (1.16).

Po číselnom dosadení

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = R\frac{A + 2Bt_1}{\left(At_1 + Bt_1^2\right)^2} = 0{,}1\frac{(3 + 2.1.1).10^{-2}}{(3.1 + 1.1)^2.10^{-4}} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$$

Uhol, ktorý zviera vektor celkového zrýchlenia s polomerom v čase t_1 = 1 s je φ_1 = 72,26°.

Príklad 1.5 Na horskej dráhe na pasažierov pôsobí dostredivé zrýchlenie, ktoré spôsobuje u človeka preťaženie. Aby jazda na tobogane bola pre pasažierov bezpečná, musí byť hodnota zrýchlenia menšia ako 4g. To sa dosahuje tak, že sa stavajú horské dráhy s veľkými polomermi. Pri hodnote preťaženia rovnajúcemu sa 4g človek už môže pociťovať problémy s videním. Nebezpečná je hodnota 6g, pri ktorej netrénovaný pasažier stráca vedomie. Odhadnite, aký môže mať polomer horská dráha, aby vozík, ktorý urobí obrat o 90 stupňov spĺňal podmienku pre preťaženie $a_d < 4g$. Počítajte s rýchlosťou vozíka 112 km/h.

$a_d < 4g$ (1)

v = 112 km/h

R = ?

Riešenie:

Dostredivé zrýchlenie má smer do stredu kružnice a teda predstavuje normálové zrýchlenie, pre ktoré platí vzťah (1.16). Dosadením do (1)

$$a_{\mathrm{d}} = \frac{v^2}{R} \rangle \ 4g \,,$$

kde v je rýchlosť vozíka a R polomer dráhy.

Úpravou pre polomer dostaneme

$$R > \frac{v^2}{4g} = 24{,}2\ \mathrm{m}$$

Polomer dráhy by mal byť väčší ako 24,2 m.

○ Úlohy

1.1 Vyšetrite pohyb hmotného bodu, ktorý je určený časovou závislosťou polohového vektora v tvare $\vec{\boldsymbol{r}} = r\cos\omega t.\vec{\boldsymbol{i}} + r\sin\omega t.\vec{\boldsymbol{j}}$, kde r, ω sú konštanty.

[pohyb po kružnici]

1.2 Pevné teleso rotuje s uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega} = At\,\vec{i} + Bt^2\,\vec{j}$, kde A = 0,5 s^{-2}, B = 0,06 s^{-3}. Vypočítajte:

a) veľkosť uhlovej rýchlosti a zrýchlenia v čase t_1 = 10 s.

b) uhol medzi vektormi uhlovej rýchlosti a uhlového zrýchlenia v tomto čase.

[a) ω = 7,81 s^{-1}, b) α = 17,2°]

1.3 Častica sa pohybuje tak, že jej poloha v ľubovoľnom okamihu je určená polohovým vektorom $\vec{r} = t\vec{i} + \left(t + t^2/2\right)\vec{j} - 4/\pi^2\left(sin(\pi t/2)\right)\vec{k}$ (m). Určte veľkosť rýchlosti a zrýchlenia častice v čase t_1 = 1 s.

[v_1 = 2,24 ms^{-1}, a_1 = 1,41 ms^{-2}]

Táto úloha je podobná ako príklad 1.1.

1.4 Závislosť dráhy hmotného bodu od času je daná rovnicou $s = At - Bt^2 + Ct^3$, kde A = 2m.s^{-1}, B = 3m.s^{-2}, C = 4m.s^{-3}. Vyjadrite rýchlosť a zrýchlenie hmotného bodu ako funkciu času. Vypočítajte rýchlosť a dráhu v čase t_1 = 2 s.

[v_1 = 38 ms^{-1}, s_1 = 24 m]

Rušeň sa rozbieha priamočiaro z pokoja s rovnomerne rastúcim zrýchlením tak, že v čase t_1 = 100 s má zrýchlenie hodnotu a_1 = 0,5 ms^{-2}. Vypočítajte rýchlosť v čase t_1 a dráhu, ktorú za ten čas prešiel.

[v_1 = 25 ms^{-1}, s_1 = 833,33 m]

Pri riešení si pomôžte príkladom 1.3.

1.6 Zrýchlenie hmotného bodu pri jeho priamočiarom pohybe rovnomerne klesá zo začiatočnej hodnoty a_0 = 10 m.s^{-2} v čase t_0 = 0 na nulovú hodnotu počas 20 s. Aká je rýchlosť hmotného bodu v čase t_1 = 20 s a akú dráhu za ten čas vykonal, keď v čase t_0 = 0 bol v pokoji?

[v_1 = 100 m.s^{-1}, s_1 = 1333,3 m]

1.7 Pozorovateľ stojaci v okamihu rozbehu vlaku pri jeho začiatku zaznamenal, že prvý vagón prešiel popri ňom za čas t_1 = 4 s. Ako dlho bude popri ňom prechádzať n-tý vagón (napr. n = 7), keď sú všetky vagóny rovnako dlhé? Pohyb vlaku je priamočiary rovnomerne zrýchlený.

[t = 0,79 s]

1.8 Koleso polomeru R = 0,1 m sa otáča tak, že φ = A + Bt + Ct^3, kde B = 2 s^{-1}, C = 1 s^{-3}. Vypočítajte uhlovú rýchlosť a uhlové zrýchlenie, obvodovú rýchlosť, tangenciálne, normálové a celkové zrýchlenie bodov na obvode kolesa v čase t_1 = 2 s od začiatku pohybu.

[$\omega_1 = 14\ \mathrm{s}^{-1}$, $\alpha_1 = 12\ \mathrm{s}^{-2}$, $v_1 = 1{,}4\ \mathrm{ms}^{-1}$, $a_{t1} = 1{,}2\ \mathrm{ms}^{-2}$, $a_{n1} = 19{,}6\ \mathrm{ms}^{-2}$, $a_1 = 19{,}64\ \mathrm{ms}^{-2}$]

1.9 Teleso sa začína otáčať okolo pevnej osi uhlovým zrýchlením $\alpha = 0{,}04\ \mathrm{s}^{-2}$, ktoré je konštantné. V akom čase od začiatku otáčania bude celkové zrýchlenie ľubovoľného bodu telesa zvierať uhol $\beta = 76°$ s rýchlosťou toho istého bodu?

[$t = 10$ s]

1.10 Vypočítajte uhlové zrýchlenie kolesa, ak v čase $t_1 = 2$ s od začiatku pohybu vektor celkového zrýchlenia bodu na obvode kolesa zvieral s vektorom rýchlosti uhol 60°.

[$\alpha = 0{,}43\ \mathrm{s}^{-2}$]

Podobný princíp bol použitý v príklade 1.4. Riešte pomocou neho úlohy 1.9 a 1.10.

1.11 Hmotný bod koná pohyb po kružnici polomeru $R = 20$ cm s konštantným uhlovým zrýchlením $\alpha = 2\ \mathrm{s}^{-2}$. Vypočítajte tangenciálne, normálové a celkové zrýchlenie v čase $t_1 = 4$ s, ak na počiatku bol hmotný bod v pokoji.

[$a_{t1} = 0{,}4\mathrm{m.s}^{-2}$, $a_{n1} = 12{,}8\mathrm{m.s}^{-2}$, $a_1 = 12{,}806\ \mathrm{m.s}^{-2}$]

1.12 Bod sa pohybuje po kružnici polomeru $R = 20$ cm s konštantným tangenciálnym zrýchlením $a_t = 5\ \mathrm{cms}^{-2}$. Za aký čas od začiatku pohybu bude normálové zrýchlenie a_n bodu:

a) rovné tangenciálnemu,

b) dvakrát väčšie ako tangenciálne?

[a) $t = 2$ s, b) $t = 2{,}83$ s]

1.13 Po opustení stanice rýchlosť vlaku rovnomerne vzrastá a po troch minútach od opustenia stanice dosahuje na dráhe zakrivenej do tvaru kružnice s polomerom $R = 800$ m hodnotu 72 km/h. Vypočítajte hodnotu tangenciálneho, normálového a celkového zrýchlenia po dvoch minútach od okamihu opustenia stanice.

[$a_t = 0{,}111\ \mathrm{m.s}^{-2}$, $a_n = 0{,}222\ \mathrm{m.s}^{-2}$, $a = 0{,}248\ \mathrm{m.s}^{-2}$]

V úlohách 1.11 -1.13 si pomôžte vzťahmi (1.15), (1.16).

1.14 Koleso sa začína otáčať so stálym uhlovým zrýchlením $\alpha = 2\ \mathrm{s}^{-2}$. Koľkokrát sa koleso otočí za prvých 15 s pohybu?

[$N = 35{,}9$]

1.15 Koleso sa z pokoja začína rovnomerne zrýchlene otáčať tak, že za prvých 5 s sa otočí 12,5-krát. Aká je uhlová rýchlosť v čase 4 s?

[$\omega = 8\pi\mathrm{s}^{-1}$]

1.16 Koleso sa otáča rovnomerne spomalene a za časový interval $t_1 = 1$ min zmenšilo svoju frekvenciu z hodnoty $f_1 = 300\ \mathrm{min}^{-1}$ na $f_2 = 180\ \mathrm{min}^{-1}$. Určte uhlové spomalenie kolesa a počet otáčok N v tomto časovom intervale.

[$\alpha = \pi/15\ \mathrm{s}^{-2}$, $N = 240$]

1.17 Ventilátor sa otáča s frekvenciou 900 min^{-1}. Po vypnutí sa ventilátor otáča rovnomerne spomalene tak, že do zastavenia urobí 75 otáčok. Aký čas uplynie od vypnutia ventilátora do jeho zastavenia?

[t = 10 s]

Tieto úlohy sú zamerané na rovnomerne zrýchlený (spomalený) otáčavý pohyb po kružnici v rovine.

1.18 Na obvode kladky polomeru R otáčajúcej sa okolo vodorovnej osi je preložené lanko so závažím. Závažie sa pohybuje zvisle nadol tak, že spĺňa rovnicu $s = (1/2)at^2$ (a je známa konštanta). Určte závislosť celkového zrýchlenia bodu na obvode kladky od času.

[$a_c = \frac{a}{R}\sqrt{R^2 + a^2 t^4}$]

1.19 Guľôčkové ložisko má stredný priemer D a priemer guľôčok je d. Dá sa použiť tak že, zalisujeme vonkajšie puzdro a vnútorné je pohyblivé alebo naopak. Kedy dosiahneme dlhšiu životnosť ložiska?

[s pevným vonkajším puzdrom je životnosť ložiska dlhšia]

1.20 Aký polomer musí mať rameno centrifúgy, aby sa pri frekvencii 0,5 Hz dosiahlo päťnásobné preťaženie?

[R = 4,97 m]

Pri riešení si pomôžte príkladom 1.5.